10. Übung zur Vorlesung „Algebra“

Sommersemester 2005

Mark de Longueville
Anja Krech

Ausgabe: 23.06.05
Abgabe: 05.07.05

Aufgabe 1

Ein Erzeugendensystem $\{x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_s}\}$ eines Monomideals heißt minimal, falls kein x^{α_i} ein x^{α_j} teilt für $i \neq j$. Zeige:

(a) Jedes Monomideal hat ein minimales Erzeugendensystem.

(b) Das minimale Erzeugendensystem eines Monomideals ist eindeutig bestimmt.

Aufgabe 2

Ist $I = < x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_s} >$ ein Monomideal, so gilt für $f \in K[x_1, \dots, x_n]$:

$$f \in I \iff \text{Der Rest der Division von } f \text{ durch } x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_s} \text{ ist Null.}$$

Aufgabe 3

Sei R ein kommutativer Ring. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) Jedes Ideal $I \in R$ ist endlich erzeugt.

(b) Jede aufsteigende Kette $I_1 < I_2 < \cdots$ von Idealen in R stabilisiert sich, d. h. es existiert ein $N \geq 1$, so dass $I_N = I_{N+1} = \cdots$.

Aufgabe 4

Sei $I = < g_1, \dots, g_t > \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ ein Ideal. Angenommen, es gilt (bezüglich einer Monomordnung), dass für alle $f \in I$ der Rest der Division von f durch $(g_1, \dots, g_t)$ Null ist. Zeige, dass dann $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ eine Gröbner-Basis von I ist.