2. Übung zur Vorlesung „Algebra“

Sommersemester 2005

Mark de Longueville
Anja Krech

Ausgabe: 21.04.05
Abgabe: 03.05.05

Es sei F/K eine Körpererweiterung.

Aufgabe 1

Zeige: Ist $\mathrm{char} K = p \neq 0$ und $[F : K]$ endlich und nicht durch p teilbar, so ist F separabel über K.

Aufgabe 2

Sei E ein Zwischenkörper der Erweiterung, so dass F/E und E/K galoissch sind.
Zeige: Ist jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(E : K)$ erweiterbar auf F, so ist F/K galoissch.

Aufgabe 3

Seien K_1, K_2 endliche Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$. Zeige:

(a) Ist $\varphi : K_1 \longrightarrow K_2$ ein Körperhomomorphismus, so gilt $\varphi(q) = q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$.

(b) Es gilt $K_1 \cong K_2$ genau dann, wenn $\theta_1 \in K_1$ und $\theta_2 \in K_2$ existieren, für die $\mathbb{Q}(\theta_1) = K_1$, $\mathbb{Q}(\theta_2) = K_2$ und $\mathrm{Irr}(\theta_1, K) = \mathrm{Irr}(\theta_2, K)$ gilt.

Aufgabe 4

Sei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}} \in \mathbb{C}$ primitive 5. Einheitswurzel. Setze $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\zeta)$. Bestimme die Galoisgruppe von L/K! Welche Untergruppen gibt es? Zu welchen Zwischenkörpern korrespondieren sie? (Was ist das Minimalpolynom von ζ?) Ist die Erweiterung galoissch?