3. Übung zur Vorlesung „Algebra“

Sommersemester 2005

Mark de Longueville
Anja Krech

Ausgabe: 28.04.05
Abgabe: 10.05.05

Aufgabe 1

Es sei $[G, G]$ die Kommutatoruntergruppe von G. Zeige:

(a) $[G, G] \lhd G$

(b) $G/[G, G]$ ist abelsch.

Setze nun $D^0G = G$ und $D^{i+1}G = [D^iG, D^iG]$ und zeige:

(c) G auflösbar $\Longleftrightarrow$ Es existiert ein $n \geq 0$, so dass $D^nG = \{e\}$.

Aufgabe 2

Seien p und q prim, $p \neq q$, und G Gruppe der Ordnung $p \cdot q$.
Zeige: G ist auflösbar.

Aufgabe 3

Sei $\pi = (x_1, \ldots, x_r)$ ein r-Zyklus in S_n und $\sigma \in S_n$. Zeige:

(a) $\sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1} = (\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_r))$.

Nun sei $V_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ die Kleinsche Vierergruppe in S_4.

(b) Zeige mit Hilfe von (a), dass V_4 Normalteiler in S_4 ist.

(c) Zeige:

$$[S_n, S_n] = A_n \qquad \text{für } n \geq 2$$

und

$$[A_n, A_n] = \begin{cases} \{id\} & \text{für } n = 2, 3, \\ V_4 & \text{für } n = 4, \\ A_n & \text{für } n \geq 5. \end{cases}$$

Aufgabe 4

Sei $f = x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ und $F \subseteq \mathbb{C}$ ein Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Bestimme $\mathrm{Gal}(F : \mathbb{Q})$, alle Untergruppen, und die dazu korrespondierenden Zwischenkörper.