4. Übung zur Vorlesung „Algebra“

Sommersemester 2005

Mark de Longueville
Anja Krech

Ausgabe: 12.05.05
Abgabe: 24.05.05

Aufgabe 1

Sei F/K endlich und galoissch und E ein Zwischenkörper. Zeige:
Es existiert ein eindeutig bestimmter kleinster Körper L mit $E \subseteq L \subseteq F$, so dass L/K galoissch ist, und es gilt

$$\mathrm{Gal}(F:L) = \bigcap_{\varphi \in \mathrm{Gal}(F:K)} \varphi(\mathrm{Gal}(F:E))\varphi^{-1}.$$

Aufgabe 2

Sei K ein Körper und $\pi \in S_n$. Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} K(x_1, \ldots, x_n) & \longrightarrow & K(x_1, \ldots, x_n) \\ \dfrac{f(x_1, \ldots, x_n)}{g(x_1, \ldots, x_n)} & \longmapsto & \dfrac{f(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})}{g(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})} \end{array}$$

ein K-Automorphismus ist.

Aufgabe 3

Es sei K Körper. Zeige: Ist $g \in K[x]$ durch Radikale auflösbar und $f \in K[x]$ mit $\mathrm{grad} f \leq 4$, so ist $h = g \circ f \in K[x]$ durch Radikale auflösbar.

Aufgabe 4

Sei $f \in K[x]$ irreduzibel vom Grad $n \geq 5$ und F ein Zerfällungskörper von f über K. Angenommen, $\mathrm{Gal}(F:K) \cong S_n$ und $u \in F$ ist eine Wurzel von f. Zeige:

(a) $K(u)/K$ ist nicht galoissch, $[K(u):K] = n$ und $\mathrm{Gal}(K(u):K)$ ist trivial.

(b) Jede normale Erweiterung von K, die u enthält, enthält eine isomorphe Kopie von F.

(c) Es gibt keine Radikalerweiterung E von K, so dass $K \leq K(u) \leq E$.