6. Übung zur Vorlesung „Algebra“

Sommersemester 2005

Mark de Longueville
Anja Krech

Ausgabe: 26.05.05
Abgabe: 07.06.05

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Ist $f(x) = \sum_{i=0}^{t} a_i x^i$, so sei $f(x^s) = \sum_{i=0}^{t} a^i x^{si}$.

Beweise folgende Aussagen für das Kreisteilungspolynom Φ_n über $\mathbb{Q}$:

(a) Ist p prim und $k \geq 1$, so ist

$$\Phi_{p^k}(x) = \Phi_p(x^{p^{k-1}}).$$

(b) Ist $n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ die Primfaktorzerlegung von n mit $k_i > 0$ für alle i, dann ist

$$\Phi_n(x) = \Phi_{p_1 \cdots p_r}(x^{{p_1}^{k_1 - 1} \cdots {p_r}^{k_r - 1}}).$$

(c) Ist n ungerade, $n \geq 3$, so gilt

$$\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x).$$

Zeige hierfür zunächst:

- $\varphi(2n) = \varphi(n)$,
- $\varphi(n)$ ist gerade für $n \geq 3$.

(d) Ist p prim und kein Teiler von n, dann gilt

$$\Phi_{pn}(x) = \frac{\Phi_n(x^p)}{\Phi_n(x)}.$$

Eine primitive n-te Einheitswurzel über $\mathbb{Q}$ sei mit ζ_n bezeichnet und der n-te Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ sei mit $\mathbb{Q}_n$ bezeichnet.

Aufgabe 2

Sei $m, n \geq 1$, $k = \text{kgV}(m, n)$, $d = \text{ggT}(m, n)$. Zeige:

(a) $\mathbb{Q}_m \cdot \mathbb{Q}_n = \mathbb{Q}_k$,

(b) $\mathbb{Q}_m \cap \mathbb{Q}_n = \mathbb{Q}_d$.

Es darf die Gleichung $\varphi(m)\varphi(n) = \varphi(k)\varphi(d)$ ohne Beweis benutzt werden.

Bitte wenden!

Aufgabe 3

Sei K eine endliche Körpererweiterung und M eine unendliche Menge paarweiser teilerfremder natürlicher Zahlen.

(a) Zeige, dass ein $m \in M$ mit $K \cap \mathbb{Q}_m = \mathbb{Q}$ existiert.

(b) Zeige, dass ein $m \in M$ existiert, so dass $K(\zeta_m)/K$ galoissch ist und deren Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K(\zeta_m)/K)$ isomorph zur (multiplikativen) primen Restklassengruppe $\mathbb{Z}_m^*$ ist.