8. Übung zur Vorlesung „Algebra“

Sommersemester 2005

Mark de Longueville
Anja Krech

Ausgabe: 09.06.05
Abgabe: 21.06.05

Aufgabe 1

Die Diedergruppe D_n, $n \geq 3$, ist die von

$$a = (\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad n\ )$$

und

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \ldots & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n. Sie ist die Symmetriegruppe des regelmäßigen n-Ecks. Zeige:

(a) D_n ist Gruppe der Ordnung $2n$ und es gelten

  (i) $a^n = 1$, $b^2 = 1$, $a^k \neq 1$, $0 < k < n$,

  (ii) $ba = a^{-1}b$.

(b) Jede Gruppe, die von zwei Elementen a und b erzeugt ist, für die (i) und (ii) gelten für ein $n \geq 3$, ist isomorph zu D_n.

Aufgabe 2

Seien G und H Gruppen und $\theta : H \longrightarrow \operatorname{Aut} G$ ein Homomorphismus.
Es sei $G \times_\theta H$ die Menge $G \times H$ mit der Verknüpfung

$$(g, h) \cdot (g', h') := (g \cdot \theta(h)(g'), h \cdot h').$$

Zeige: $G \times_\theta H$ ist eine Gruppe mit neutralem Element (e, e).

$G \times_\theta H$ heißt *semidirektes Produkt* von G und H.

Aufgabe 3

Seien $C_p =< a >$ und $C_q =< b >$ zyklische Gruppen der Ordnung p und q, p, q prim, $p > q$ und $q \mid p - 1$. Sei s eine ganze Zahl, so dass

$$\begin{aligned} s &\not\equiv 1 \mod p, \\ s^q &\equiv 1 \mod p. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Zeige:

(a) Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & C_p & \longrightarrow & C_p \\ & a^i & \longmapsto & a^{si} \end{array}$$

ist ein Automorphismus.

(b) Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \theta: & C_q & \longrightarrow & \operatorname{Aut} C_p \\ & b^j & \longmapsto & \alpha^j \end{array}$$

ist ein Homomorphismus.

(c) Schreiben wir kurz a für (a, e) und b für (e, b), so ist die Gruppe $C_p \times_\theta C_q$ eine Gruppe der Ordnung $p \cdot q$, erzeugt durch a und b, für die gelten:

$$|< a >|= p, \quad |< b >|= q, \quad ba = a^s b.$$

$C_p \times_\theta C_q$ heißt die *metazyklische Gruppe*.

Aufgabe 4

Zeige, dass jede echte algebraische Erweiterung von $\mathbb{R}$ isomorph zu $\mathbb{C}$ ist.