9. Übung zur Vorlesung „Algebra“

Sommersemester 2005

Mark de Longueville — Ausgabe: 16.06.05

Anja Krech — Abgabe: 28.06.05

Aufgabe 1

(a) Sei $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ und N die höchste Potenz mit der eine der Variablen in einem der Terme von f enthalten ist. Sei

$$\mathbb{Z}^n_{N+1} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n : 1 \leq x_i \leq N+1\} \subseteq \mathbb{C}^n.$$

Zeige: Verschwindet f auf $\mathbb{Z}^n_{N+1}$, so ist f das Nullpolynom.

(b) Zeige: $X = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, x \neq 1\}$ ist keine affine Varietät.

(c) Sei K ein Körper und $S \subseteq K^n$ Teilmenge des affinen Raumes. Definiere

$$I(S) := \{f \in K[x_1, \ldots, x_n] : f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ für alle } (a_1, \ldots, a_n) \in S\}.$$

(i) Zeige: $I(S)$ ist ein Ideal.

(ii) Bestimme $I(X)$ für das X aus Aufgabenteil (b).

(iii) Sei $S = \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{C}^n = K^n$. Bestimme $I(\mathbb{Z}^n)$.

Aufgabe 2

Ein Ideal heißt *Radikalideal*, falls gilt:

$$f \in I \Longleftrightarrow f^m \in I \text{ für ein } m \geq 1.$$

Zeige:

(a) Ist $V \subseteq K^n$ eine affine Varietät, so ist $I(V)$ ein Radikalideal.

(b) $< x^2, y^2 > \subseteq K[x, y]$ ist kein Radikalideal.

Ist $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal, so heißt

$$\sqrt{I} = \{f \in K[x_1, \ldots, x_n] : f^m \in I \text{ für ein } m \geq 1\}$$

das *Radikal von I*.

Sei nun $f \in \mathbb{C}[x]$, dann hat f die Gestalt $f = c(x - a_1)^{r_1} \cdots (x - a_l)^{r_l}$. Definiere

$$f_{red} = c(x - a_1) \cdots (x - a_l),$$

den *quadratfreien Anteil von f*.

Bitte wenden!

Zeige:

(c) $V(f) = \{a_1, \ldots, a_l\}$,

(d) $I(V(f)) =< f_{red} >$,

(e) $< f_{red} >$ ist ein Radikalideal und es gilt $< f_{red} >= \sqrt{< f >}$, also $I(V(f)) = \sqrt{< f >}$,

(f) $f_{red} = \frac{f}{\mathrm{ggT}(f,f')}$, d. h. f_{red} lässt sich algorithmisch gut berechnen, insbesondere ist die Bestimmung der Nullstellen von f unnötig.

Aufgabe 3

In dieser Aufgabe geht es um eine genauere Charakterisierung des Ausdrucks

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_s f_s + r,$$

der durch den Divisionsalgorithmus erzeugt wird.

Sei $\alpha(i) \in \mathbb{N}^n$, so dass $\mathrm{LM}(f_i) = x^{\alpha(i)}$. Setze nun

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \alpha(1) + \mathbb{N}^n, \\
\Delta_2 &= (\alpha(2) + \mathbb{N}^n) \setminus \Delta_1, \\
&\vdots \\
\Delta_s &= (\alpha(s) + \mathbb{N}^n) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{s-1} \Delta_i \right), \\
\bar{\Delta} &= \mathbb{N}^n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{s} \Delta_i \right).
\end{aligned}$$

Zeige:

(a) $\beta \in \Delta_i \Longleftrightarrow x^{\alpha(i)} \mid x^\beta$, aber kein $x^{\alpha(j)}$ teilt x^β für $j < i$.

(b) $\gamma \in \bar{\Delta} \Longleftrightarrow$ kein $x^{\alpha(i)}$ teilt x^γ.

(c) Für den Ausdruck $f = a_1 f_1 + \cdots + a_s f_s + r$, der durch den Divisionsalgorithmus erzeugt wird, gilt: Für jedes i und jeden Term cx^β in a_i ist $\beta + \alpha(i) \in \Delta_i$ und für jeden Term cx^γ in r ist $\gamma \in \bar{\Delta}$.

(d) Der Ausdruck $f = a_1 f_1 + \cdots + a_s f_s + r$ ist durch die Eigenschaften in (c) eindeutig bestimmt.