Felsner/de Longueville

Nachbesprechung am Donnerstag, den 23.5.2002, in der Übung

Aufgabe 1)

Sei n eine ungerade Zahl und ebensoviele Knoten äquidistant auf einem Kreis gegeben. Wir betrachten als Kantenmenge die möglichen Verbindungsstrecken zwischen Paaren von Knoten. Zwei Kanten heißen disjunkt, falls sie weder einen gemeinsamen Endpunkt haben, noch sich im Inneren schneiden. Für ein k mit $2k+1 \leq n$ nennen wir einen Graphen G mit Kanten aus obiger Menge *k-klaustrophobisch*, wenn es keine Menge von $k+1$ paarweise disjunkten Kanten in G gibt. Wie viele Kanten kann ein k-klaustrophobischer Graph G maximal haben? **Hinweis:** Jeder Knoten definiert eine Familie von $\frac{n-1}{2}$ paarweise disjunkten Kanten. Mache Dir ein Bild davon.

Aufgabe 2)

Es sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph auf n Knoten. Der Abstand $d(x, y)$ zwischen zwei Knoten $x, y \in V$ ist definiert als die Anzahl der Kanten eines kürzesten Weges von x nach y. Der Durchmesser von G ist dann gegeben durch

$$\operatorname{diam} G = \max_{x,y \in V} d(x, y).$$

Nun habe G Zusammenhang $\kappa(G) = k$ und Durchmesser $\operatorname{diam} G = d$. Zeige, daß gilt

$$n \geq k(d-1) + 2.$$

Für jedes $k \geq 1$ und $d \geq 2$ konstruiere einen Graphen, der die Ungleichung mit Gleichheit erfüllt.

Aufgabe 3)

Es seien G ein einfacher Graph und e eine Kante von G. Zeige ohne Ausnutzung des Satzes von Menger, daß $\kappa(G-e) \geq \kappa(G) - 1$ für den Zusammenhang von $G - e$ gilt.

Aufgabe 4)

Für einen Graphen $G = (V, E)$ ist der *Kantengraph* $L(G)$ der Graph auf der Knotenmenge E und zwei Knoten $e, f \in E$ sind in $L(G)$ benachbart, wenn sie in G genau einen Knoten gemeinsam haben. Nun sei G ein einfacher Graph ohne isolierte Knoten. Zeige, daß wenn $L(G)$ zusammenhängend und regulär ist, daß dann entweder G regulär, oder ein bipartiter Graph ist, in dem die Knoten in jeder der beiden Partitionsmengen den paarweise gleichen Grad haben.

Aufgabe 5)

Für einen einfachen Graphen G und zwei Knoten x, y aus G definieren wir $\kappa'(x, y)$ als die kleinste Anzahl von Kanten deren Löschen y von x aus unerreichbar macht. Ferner sei $\lambda'(x, y)$ die maximale Anzahl von paarweise Kantendisjunkten x, y-Wegen. Zeige, daß $\kappa'(x, y) = \lambda'(x, y)$ gilt. **Hinweis:** Füge zu G zwei neue Knoten s und t, und Kanten sx und ty hinzu. Betrachte nun den Kantengraph dieses erweiterten Graphen.