Abgabe am Donnerstag, den 30.5.2002, vor der Übung

Aufgabe 1)

Sei $I \in \mathcal{J}$ eine unabhängige Menge eines Matroids $M = (S, \mathcal{J})$, und $x \in S$, so daß $I \cup \{x\}$ abhängig ist. Zeige, daß $I \cup \{x\}$ eine eindeutige minimal abhängige Menge enthält.
Hinweis: Nimm an, es gäbe zwei minimal abhängige Mengen $A \neq A'$. Beachte ferner, daß $(A \cup A') \setminus \{x\}$ und jede echte Teilmenge von A bzw. A' unabhängig ist.

Aufgabe 2)

Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph, und $M = (E, \mathcal{J})$ das dazugehörige graphische Matroid. Es sei $F \subseteq E$. Charakterisiere a) rang(F), b) $\langle F \rangle$ und c) die abgeschlossenen Mengen des Matroids.

Aufgabe 3)

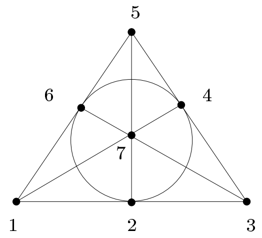
Zeige das Matroidaxiom (I3) für das Transversalenmatroid $M = (S, \mathcal{J})$ welches durch die Mengenfamilie $A_1, \ldots, A_m$ von Teilmengen von S gegeben ist.

Aufgabe 4)

Das Fanomatroid sei das Matroid $M = (S, \mathcal{C})$ auf der Menge $S = \{1, \ldots, 7\}$, dessen Kreise $\mathcal{C}$ gegeben sind durch

$$\{\{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{1,5,6\}, \{1,4,7\}, \{2,5,7\}, \{3,6,7\}, \{2,4,6\}\},$$

sowie alle 4-elementigen Teilmengen von S, die nicht eine der genannten 3-elementigen enthalten. Zeige, daß dies ein Matroid ist, charakterisiere die Basen des Matroids und zähle sie ab.



Aufgabe 5)

Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph mit zugehörigem graphischen Matroid M. Ein Schnitt ist eine Menge von Kanten der Form $F = [S, \bar{S}] = \{xy \in E : x \in S, y \in V \setminus S\}$, wobei S eine nichtleere, echte Teilmenge von V ist. Die Kreise $\mathcal{C}$ des *Schnittmatroids* $M' = (E, \mathcal{C})$ seien die inklusionsminimalen nichtleeren Schnitte. Zeige, daß M' ein Matroid ist, welches zu M dual ist.

Hilfe: In einem zusammenhängenden Graphen G ist ein Schnitt F nichtleer und inklusionsminimal, genau dann wenn $G \setminus F$ zwei Komponenten hat.