Felsner/de Longueville

Abgabe am Donnerstag, den 13.6.2002, vor der Übung

Aufgabe 1)

Es sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph. Finde unter den Schnitten der Form $E(v) = [\{v\}, V \setminus \{v\}]$ eine Basis des Schnittraumes $\mathcal{S}(G)$.

Aufgabe 2)

Ein geschlossener Kantenzug in einem Graphen heißt eulersch, falls er jede Kante des Graphen genau einmal durchläuft. Ein Graph G heißt eulersch, falls er einen eulerschen Kantenzug besitzt. Zeige, daß ein zusammenhängender Graph G eulersch ist genau dann, wenn jeder Knoten von G geraden Grad hat.

Aufgabe 3)

Es sei ein eulerscher Graph G mit Maximalgrad $\Delta(G) > 2$ gegeben. Zeige, daß die Anzahl der eulerschen Kantenzüge gerade ist.

Aufgabe 4)

Zeige, daß wenn ein zusammenhängender, nichttrivialer Graph G nicht eulersch ist, er eine Kante enthält, die in einer geraden Anzahl von Kreisen von G enthalten ist. **Hinweis:** Betrachte einen Knoten ungeraden Grades, und dessen inzidente Kanten.

Aufgabe 5)

a) Bestimme das Tutte-Polynom von K_4.
b) Betrachte einen einfachen Graphen $G = (V, E)$. Es sei $\varphi_G(k)$ das chromatische Polynom aus Aufgabe 5) vom letzten Übungsblatt. Warum ist dies ein Polynom in k? Zeige, daß die folgende Relation zwischen dem chromatischen Polynom und dem Tutte-Polynom besteht

$$\varphi_G(k) = (-1)^{r(G)} k^{c(G)} T_G(1 - k, 0),$$

wobei $c(G)$ die Anzahl der Komponenten von G ist, und $r(G) = |V| - c(G)$ der Rang von G ist.

Zusatzaufgabe

Die Umkehrung der Aussage in Aufgabe 4) gilt ebenfalls, d.h. in einem eulerschen Graphen ist jede Kante in einer ungeraden Anzahl von

Kreisen enthalten. Dies gibt also eine alternative Charakterisierung eulerscher Graphen. Um dies zu zeigen betrachte einen eulerschen Graphen G und eine Kante uv von G. Zeige zunächst, daß es in $G \backslash uv$ eine ungerade Anzahl von Kantenzügen von u nach v gibt, welche v nur einmal am Ende besuchen. (**Hinweis:** Betrachte einen geeigneten Suchbaum, und zeige, daß er eine ungerade Anzahl von Blättern besitzt.) Im nächsten Schritt zeige, daß die Anzahl der Kantenzüge, die keine Wege sind gerade ist.