Felsner/de Longueville

Abgabe am Donnerstag, den 19.6.2002, vor der Übung

Aufgabe 1)

Unter einer *Orientierung der Kanten* eines Graphen $G = (V, E)$ verstehen wir eine Abbildung, die jeder Kante e ein Paar $(t(e), h(e))$ zuordnet, wobei $e = \{t(e), h(e)\}$. Anschaulich entspricht dann $t(e)$ der Anfangsecke (tail), und $h(e)$ der Endecke (head) der orientierten Kante. Ein *orientierter Kreis* ist dann ein Kreis, in dem alle Kanten in oder gegen die Kreisrichtung orientiert sind. Eine Orientierung der Kanten heißt *azyklisch,* falls sie keine orientierten Kreise besitzt. Zeige, daß für einen beliebigen Graphen G die Auswertung $T_G(2, 0)$ des Tutte-Polynoms genau die Anzahl der azyklischen Orientierungen eines Graphen angibt.

Aufgabe 2)

Es sei $G = (V, E)$ ein planarer eingebetteter Graph. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
(i) G ist bipartit,
(ii) jede Fläche hat gerade Länge, ist also von einer geraden Anzahl von Kanten berandet (wobei hier richtig gezählt werden muß!),
(iii) der duale Graph G^* ist eulersch.

Aufgabe 3)

Ein 3-dimensionales reguläres Polyeder sei ein konvexer Körper (genauer: Schnitt von Halbräumen) im 3-dimensionalen euklidischen Raum mit nichtleerem Inneren, so daß alle Seitenflächen reguläre Polygone der gleichen Länge sind, und in jeder Ecke des Polyeders gleich viele Seitenflächen zusammenstossen. Die Kanten und Ecken eines solchen Polyeders bilden offensichtlich einen planaren Graphen. Nutze diese Tatsache und Eulers Gleichung, um alle 3-dimensionalen regulären Polyeder zu klassifizieren. Diese sind die sogenannten platonischen Körper.

Aufgabe 4)

Ein planarer Graph G heißt *"outer"planar*, wenn er so in die Ebene eingebettet werden kann, daß alle Knoten am Rande der unbeschränkten Fläche liegen. Bestimme die maximale Anzahl von Kanten, die ein “outer”planarer Graph G mit n Knoten haben kann. **Hinweis:** Zeige zunächst, daß ein maximaler “outer”planarer Graph mit mindestens 3 Knoten 2-zusammenhängend ist. Dann füge zu einem maximal “outer”planaren Graphen einen weiteren Knoten hinzu.

Aufgabe 5)

Zeige, daß jeder 3-zusammenhängende Graph auf $n \geq 6$ Knoten, der eine Unterteilung des K_5 enthält, auch eine Unterteilung des $K_{3,3}$ enthält.