9. Übung zur Graphentheorie SoSe 2002

Felsner/de Longueville

Abgabe am Donnerstag, den 27.6.2002, vor der Übung

Aufgabe 1)

Es sei G ein maximal planarer einfacher Graph. Zeige, daß G 3-färbbar ist, genau dann, wenn jeder Knoten von G geraden Grad hat. **Hinweis:** Für die Rückrichtung beobachte zunächst, daß eine Färbung zweier benachbarter Knoten auf höchstens eine Weise auf den gesamten Graphen ausgeweitet werden kann. Zeige, daß dies unter der gegebenen Voraussetzung immer möglich ist.

Aufgabe 2) (Satz von Heawood)

Gegeben sei eine ebene Triangulierung, und die Kanten der Triangulierung seien wie im Satz von Tait 3-gefärbt, also sind die Kanten jedes Dreiecks der Triangulierung mit den 3 verschiedenen Farben gefärbt. Zeige, daß eine Färbung $c : \mathcal{F} \to \{+1, -1\}$ der Dreieckseiten der Triangulierung existiert mit der Eigenschaft, daß für jeden Knoten v von G gilt:

$$\sum_{F \in \mathcal{F} : v \text{ Randknoten von } F} c(F) \equiv 0 \pmod{3}.$$

Bemerkung: Der Satz von Heawood behauptet auch die Umkehrung.

Aufgabe 3)

Ein in der Vorlesung erwähnter gerühmter Satz von Koebe besagt, daß jeder planare einfache Graph ein Coin–Graph ist. Ein *Penny–Graph* sei nun ein Coin–Graph, für den eine Darstellung mit Kreisen gleichen Radius' existiert. Ist jeder planare einfache Graph ein Penny–Graph?

Aufgabe 4)

Betrachte ein *Gitterdreieck* $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$, also ein Dreieck mit ganzzahligen Ecken $\{p_0, p_1, p_2\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Δ heißt *elementar*, falls es keine weiteren ganzzahligen Punkte in Δ gibt. Zeige, daß der Flächeninhalt $A(\Delta)$ eines elementaren Dreiecks Δ immer $\frac{1}{2}$ ist. **Hinweis:** Betrachte das Parallelogramm P gegeben durch $\{p_0, p_1, p_2, p_1 + p_2 - p_0\}$. Die Translate dieses Parallelogramms pflastern die Ebene. Um den Flächeninhalt des Parallelogramms zu berechnen betrachte eine Folge von Gitterquadraten, die unendlich groß werden.

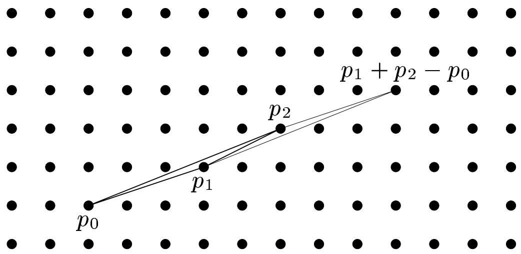

ABBILDUNG 1. Ein elementares Gitterdreieck.

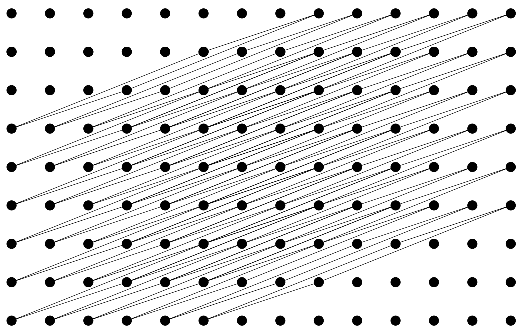

ABBILDUNG 2. Ein Teil der Pflasterung.

Aufgabe 5) (Theorem von Pick)

Betrachte ein Polygon $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ mit ganzzahligen Ecken. Zeige, daß für die Fläche $A(Q)$ des Polygons gilt:

$$A(Q) = n_{int} + \frac{1}{2}n_{bd} - 1,$$

wobei n_{int} und n_{bd} die Anzahl der ganzzahligen Punkte im Inneren beziehungsweise auf dem Rand des Polygons sind. **Hinweis:** Führe einen Induktionsbeweis über die "Größe der Fläche" und wende Aufgabe 4) an.

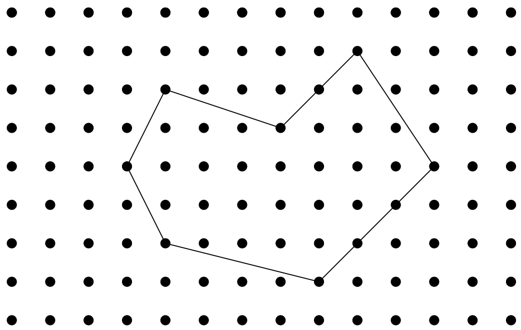

ABBILDUNG 3. Ein Gitterpolygon.