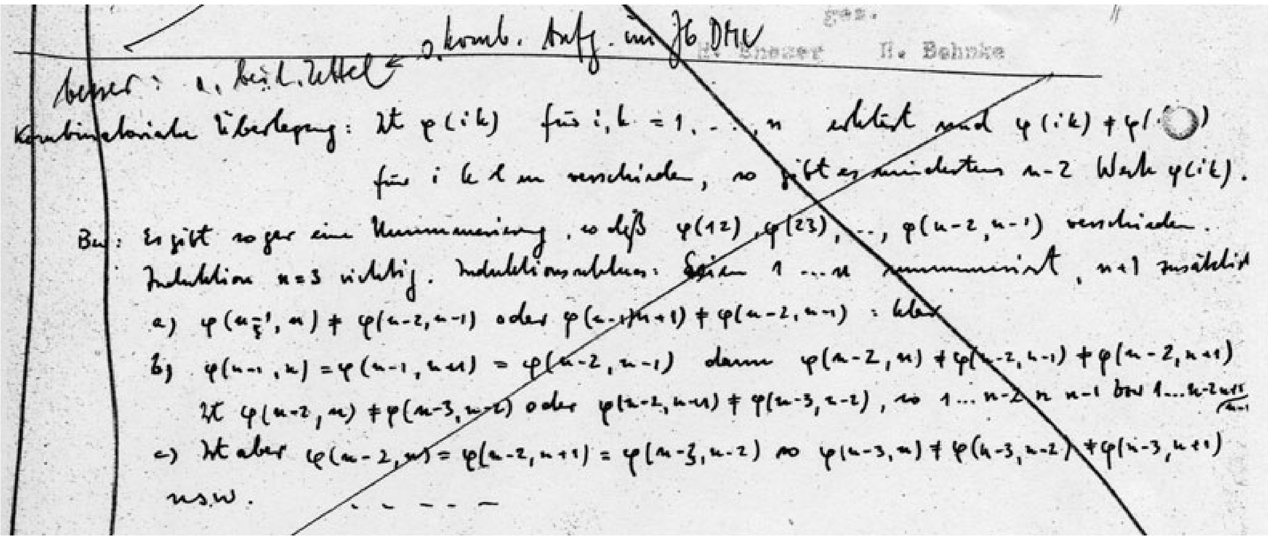

s. komb. Aufg. im Jb DMV
gez. M. Kneser H. Behnke
Bemerk.: s. beil. Zettel
Kombinatorische Überlegung: Ist $\varphi(ik)$ für $i,k = 1, \ldots, n$ erklärt und $\varphi(ik) \neq \varphi(lm)$
für $i\,k\,l\,m$ verschieden, so gibt es mindestens $n-2$ Werte $\varphi(ik)$.
Bew.: Es gibt sogar eine Nummerierung, so daß $\varphi(12), \varphi(23), \ldots, \varphi(n-2, n-1)$ verschieden.
Induktion $n=3$ richtig. Induktionsschluss: Seien $1 \ldots n$ nummeriert, $n+1$ zusätzlich
a) $\varphi(n-1, n) \neq \varphi(n-2, n-1)$ oder $\varphi(n-1, n+1) \neq \varphi(n-2, n-1)$: klar
b) $\varphi(n-1, n) = \varphi(n-1, n+1) = \varphi(n-2, n-1)$ dann $\varphi(n-2, n) \neq \varphi(n-2, n-1) \neq \varphi(n-2, n+1)$
Ist $\varphi(n-2, n) \neq \varphi(n-3, n-2)$ oder $\varphi(n-2, n+1) \neq \varphi(n-3, n-2)$, so $1 \ldots n-2\; n\; n-1$ bzw $1 \ldots n-2\; n+1\; n-1$
c) Ist aber $\varphi(n-2, n) = \varphi(n-2, n+1) = \varphi(n-3, n-2)$ so $\varphi(n-3, n) \neq \varphi(n-3, n-2) \neq \varphi(n-3, n+1)$
usw. – – – –

Abbildung 1. „s. komb. Aufg. im Jb DMV" – die Entstehung der Kneservermutung in der Handschrift von Martin Kneser.

25 Jahre Beweis der Kneservermutung
Der Beginn der topologischen Kombinatorik

von Mark de Longueville

Mit dem Beweis der Kneservermutung durch László Lovász vor gut 25 Jahren begann die Geschichte der topologischen Kombinatorik: Anwendungen topologischer Methoden und Sätze auf Probleme der diskreten Mathematik, die zunächst keine offensichtliche Verbindung zur Topologie haben.

Mit diesem Beitrag möchte ich den Beweis der sogenannten Kneservermutung, der vor 25 Jahren veröffentlicht wurde, zum Anlass nehmen, über die Entwicklung topologischer Beweise in der diskreten Mathematik und über die daraus entstandene Disziplin, die *topologische Kombinatorik*, zu berichten. Während die *kombinatorische Topologie* bereits zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts Gebrauch von kombinatorischen Konzepten in der Topologie machte und zur Entstehung der algebraischen Topologie führte, hat die diskrete Mathematik bis zum wegweisenden Beweis der Kneservermutung, zumindest was ihre Beweistechniken betraf, keine wesentliche Notiz von der (algebraischen) Topologie genommen. Dies sollte sich auf unerwartete und faszinierende Weise ändern!

Das Wesen der topologischen Kombinatorik läßt sich durch ein Schema charakterisieren, das vielen Beweisen in diesem Gebiet zugrundeliegt. Wollen wir ein kombinatorisches Problem mit topologischen Mitteln lösen, so führen wir folgende Schritte aus.

1. Assoziiere mit der gegebenen diskreten Struktur, zum Beispiel einem Graphen/Graphenhomomorphismus, einen einfach strukturierten topologischen Raum/eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen.
2. Stelle eine Beziehung zwischen geeigneten topologischen Invarianten des Raums, zum Beispiel Dimension, k-Zusammenhang, Homologiegruppen, etc. und der gewünschten Kombinatorik der ursprünglichen Struktur her.
3. Zeige, dass der assoziierte Raum bzw. die Abbildung die gewünschten topologischen Eigenschaften haben.

Also ein (funktorielles) Vorgehen, welches grundsätzlich in der Mathematik weit verbreitet ist. Jedoch anders als in anderen Gebieten müssen die Konstruktionen immer wieder neu erfunden und für jedes Problem maßgeschneidert werden. Dafür sind ein gewisses Maß an Genialität oder zumindest tieferer Einsicht erforderlich, sowohl bei der Zuordnung des entsprechenden topologischen Raums, also in Schritt 1, als auch bei der Herstellung der Beziehung zwischen Topologie und Kombinatorik in Schritt 2.

Der erste Beweis dieser Art ist der Beweis der Kneservermutung durch László Lovász. Wegen seiner Bedeutung für die Entstehung der topologischen Kombinatorik, seiner Eleganz und seines 25-jährigen Jubiläums werde ich im folgenden diesen Beweis skizzieren, und über die Entwicklung der topologischen Kombinatorik berichten.

Die Kneservermutung und ihr Beweis

Die Beschäftigung mit einer Arbeit Irving Kaplanskys von 1953 über quadratische Formen führte Mar-

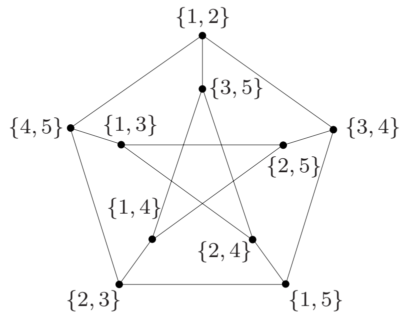

Abbildung 2. Der bekannte Petersengraph hier in Gestalt des Knesergraphen $K_{5,2}$.

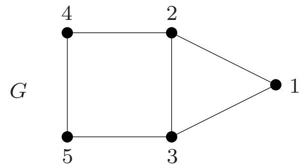

Abbildung 3. Ein Graph G.

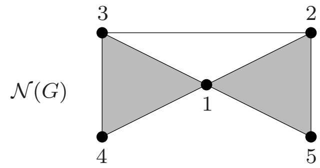

Abbildung 4. Der zu G assoziierte Nachbarschaftskomplex $\mathcal{N}(G)$.

tin Kneser zu einer Frage über das Verhalten von Partitionen der Menge der k-Teilmengen einer n-Menge:

> Betrachte die Familie aller k-Teilmengen einer n-Menge. Es ist leicht, diese Familie in $n-2k+2$ Klassen $C_1 \cup \cdots \cup C_{n-2k+2}$ aufzuteilen, so dass kein Paar von k-Mengen innerhalb einer Klasse disjunkt ist. Ist es möglich eine Aufteilung in $n-2k+1$ Klassen mit der gleichen Eigenschaft vorzunehmen?

Kneser vermutete, dass dies nicht möglich ist! Er präsentierte seine Vermutung 1955 im Jahresbericht der DMV in Form einer Aufgabe [6] (siehe Abbildungen 1 und 6).

Wir werden Knesers Vermutung in die Sprache der Graphentheorie übersetzen. Dazu definieren wir den Knesergraphen $KG_{n,k}$ auf naheliegende Weise: die Ecken sind die k-Teilmengen einer n-Menge, die Kanten sind durch Paare disjunkter k-Mengen gegeben. Abbildung 2 zeigt den so entstehenden Graphen für $n = 5$ und $k = 2$. Zum Beispiel haben wir eine Kante zwischen den Mengen $\{1,2\}$ und $\{3,5\}$, weil diese Mengen einen leeren Schnitt haben.

Die zuvor betrachteten Partitionen der k-Teilmengen einer n-Menge entsprechen nun Partitionen der Eckenmenge des Graphen in sogenannte *Farbklassen.* Die Eigenschaft, dass keine der Partitionsmengen ein disjunktes Paar von k-Mengen enthält, übersetzt sich in die Eigenschaft, dass keine der Farbklassen zwei Ecken enthält, die im Graph über eine Kante benachbart sind. Eine solche Partition nennt man eine *Färbung des Graphen.* Die *chromatische Zahl des Graphen* ist die minimale Anzahl von benötigten Farbklassen in einer Färbung. Wie bereits bemerkt ist es leicht, eine Färbung von $KG_{n,k}$ mit $n-2k+2$ Farbklassen anzugeben. Folgendes Beispiel zeigt $5-2\cdot 2+2 = 3$ mögliche Farbklassen C_1, C_2, C_3, die eine minimale Färbung von $KG_{5,2}$ definieren.

$$C_1 = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\}\}$$
$$C_2 = \{\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\}\}$$
$$C_3 = \{\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}$$

(Das Beispiel verrät schon das allgemeine Prinzip für eine Zerlegung in $n-2k+2$ Farbklassen!) Die Knesevermutung behauptet nun, dass es nicht mit weniger Farben geht, also eine *untere Schranke von $n-2k+2$ für die chromatische Zahl der Graphen $KG_{n,k}$.*

Dreiundzwanzig Jahre nachdem Kneser seine Aufgabe stellte gab László Lovász mit seinem 1978 veröffentlichten Beweis der Knesevermutung [7] den Anstoß für die Entstehung der topologischen Kombinatorik. In der folgenden Beweisskizze werden einige topologische Begriffe ohne weitere Erläuterung benutzt, die sich aber in jedem Lehrbuch über Topologie, wie z. B. [11], finden lassen.

Lovász' Beweis der Knesevermutung folgt dem in der Einleitung beschriebenen Schema. Schritt 1 basiert auf der Erfindung eines für beliebige Graphen G definierbaren Simplizialkomplexes, dem Nachbarschaftskomplex $\mathcal{N}(G)$. Simplexe im Nachbarschaftskomplex sind definiert durch Mengen von Ecken des Graphen, die einen gemeinsamen Nachbarn haben.

Betrachten wir beispielsweise den Graphen G in Abbildung 3. Dieser definiert den Nachbarschaftskomplex $\mathcal{N}(G)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(G) = \{&\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\\ &\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\\ &\{2,3\},\{2,5\},\{3,4\},\\ &\{1,2,5\},\{1,3,4\}\}\,.\end{aligned}$$

Die inklusionsmaximalen Simplexe in $\mathcal{N}(G)$ sind gegeben durch $\{1,2,5\}$, $\{1,3,4\}$ und $\{2,3\}$. Im Graphen G entsprechen diese den Nachbarschaften der Ecken 3, 2 beziehungsweise 1. Abbildung 4 zeigt den topologischen Raum, der diesem Simplizialkomplex zugrundeliegt, welchen wir ebenfalls mit $\mathcal{N}(G)$ bezeichnen. Die Simplexe $\{1,2,5\}$ und $\{1,3,4\}$ entsprechen den beiden schraffierten Dreiecken, der Simplex $\{2,3\}$ entspricht der Strecke von 2 nach 3.

In Schritt 2 nutzt Lovász virtuos den *Satz von Borsuk–Ulam* aus der Topologie, über dessen Entstehung Gian-Carlo Rota in einem Aufsatz über Stan Ulam schrieb:

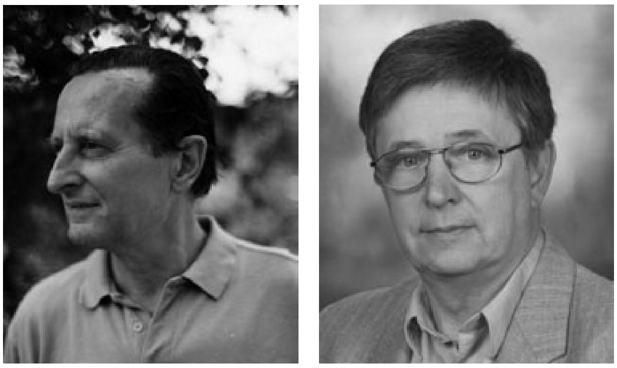

Abbildung 5. Martin Kneser (links) und László Lovász (rechts).

Aufgabe 360: k und n seien zwei natürliche Zahlen, $k \leqq n$; N sei eine Menge mit n Elementen, N_k die Menge derjenigen Teilmengen von N, die genau k Elemente enthalten; f sei eine Abbildung von N_k auf eine Menge M, mit der Eigenschaft, daß $f(K_1) \neq f(K_2)$ ist falls der Durchschnitt $K_1 \cap K_2$ leer ist; $m(k, n, f)$ sei die Anzahl der Elemente von M und $m(k, n) = \operatorname{Min}_f m(k, n, f)$. Man beweise: Bei festem k gibt es Zahlen $m_0 = m_0(k)$ und $n_0 = n_0(k)$ derart, daß $m(k, n) = n - m_0$ ist für $n \geqq n_0$; dabei ist $m_0(k) \geqq 2k - 2$ und $n_0(k) \geqq 2k - 1$; in beiden Ungleichungen ist vermutlich das Gleichheitszeichen richtig.

Heidelberg. MARTIN KNESER.

Abbildung 6. Aus dem Jahresbericht der DMV von 1955.

> While chatting at the Scottish Café with Borsuk, an outstanding Warsaw topologist, he [Ulam] saw in a flash the truth of what is now called the Borsuk–Ulam theorem. Borsuk had to comandeer all his technical resources to prove it.

Eine der gebräuchlichen Versionen dieses Satzes lautet:

> Falls eine antipodenerhaltende stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^m$ von der n-Sphäre in die m-Sphäre existiert, das heißt eine stetige Abbildung, die $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$ erfüllt, so gilt $m \geq n$.

Lovász zeigt nun: wenn $\mathcal{N}(G)$ topologisch m-zusammenhängend ist, so ist G nicht $(m+2)$-färbbar, das heißt es existiert keine Färbung von G mit $m+2$ Farbklassen. Im Beispiel von Abbildung 4 ist der Nachbarschaftskomplex 0-zusammenhängend, das heißt zusammenhängend, aber nicht 1-zusammenhängend, da beispielsweise die Schleife $1 \to 2 \to 3 \to 1$ sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen läßt. Dies reflektiert den Sachverhalt, dass G nicht 2-färbbar, aber 3-färbbar ist.

Dieses Herzstück des Beweises werden wir aus etwas modernerer Sicht (siehe beispielsweise [2] und ganz aktuell [10]) kurz skizzieren. Eine $(m+2)$-Färbung eines Graphen G induziert einen Graphenhomomorphismus $G \to K_{m+2}$ von G in den vollständigen Graphen K_{m+2} auf $m+2$ Ecken in dem alle Paare von Ecken durch eine Kante verbunden sind. Ein solcher Graphenhomomorphismus induziert eine stetige Abbildung $\mathcal{N}(G) \to \mathcal{N}(K_{m+2})$ der topologischen Räume. Es ist leicht einzusehen, dass $\mathcal{N}(K_{m+2})$ eine m-dimensionale Sphäre ist. Ist nun $\mathcal{N}(G)$ n-zusammenhängend, so läßt sich mit Hilfe der Abbildung $\mathcal{N}(G) \to \mathcal{N}(K_{m+2})$ eine stetige antipodenerhaltende Abbildung $f : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{S}^m$ konstruieren. Also gilt nach dem Satz von Borsuk–Ulam $m \geq n+1$, bzw. $n \leq m-1$, was zu zeigen war.

In Schritt 3 beendet Lovász seinen Beweis mit dem Nachweis, dass $\mathcal{N}(KG_{n,k})$ tatsächlich $(n-2k-1)$-zusammenhängend ist.

Damit hatte Lovász den topologischen Kern des Problems identifiziert: den Satz von Borsuk–Ulam. Noch im selben Jahr 1978 folgte darauf ein sehr viel kürzerer Beweis der Kneservermutung durch Imre Bárány, der den Satz von Borsuk–Ulam auf direktere Art einsetzte. Erst im Jahr 2002 wurde eine weitere deutliche Vereinfachung des Bárány-Beweises von dem amerikanischen Mathematikstudenten Joshua Greene [4] gefunden. Für seinen Beweis, der als „Proof from the Book" angesehen werden kann, ist Greene mit dem Morgan-Preis der AMS ausgezeichnet worden.

Topologische Kombinatorik

Die Rolle des Satzes von Borsuk–Ulam beschränkt sich nicht auf den Beweis der Kneservermutung. Allgemeine Schranken für die chromatische Zahl eines Graphen, Partitionsresultate, Komplexitätsschranken für algorithmische Probleme, und vieles mehr wurden mit Hilfe des Satzes von Borsuk–Ulam und seinen Verallgemeinerungen erzielt. Die vielleicht bedeutendste Verallgemeinerung ist ein von Albrecht Dold [3] im Jahr 1983 präsentierter Satz:

> G sei eine nichttriviale Gruppe, die frei auf (gutartigen) Räumen X und Y operiert, X sei $(n-1)$-zusammenhängend, und Y habe Dimension m. Falls eine G-äquivariante Abbildung von X nach Y existiert, so gilt $m \geq n$.

Für $X = \mathbb{S}^n$, $Y = \mathbb{S}^m$, und G die zweielementige Gruppe, die per Antipodenabbildung auf den Sphären operiert, erhalten wir genau den Satz von Borsuk–Ulam. Tatsächlich gibt es eine derartige Vielfalt von Anwendungen dieses Satzes und seinen Verallgemeinerungen in der Kombinatorik, dass Jiří Matoušek diesen ein ganzes (und ganz wunderbares) Buch mit dem Titel „Using the Borsuk–Ulam Theorem" [8] gewidmet hat.

Während der Satz von Borsuk–Ulam vielleicht die prominenteste Rolle in der topologischen Kombinatorik spielt, haben inzwischen die meisten Standardwerkzeuge der algebraischen Topologie, von Homologie- und Kohomologieberechnungen über charakteristische Klassen bis hin zu Spektralsequenzen ihre Anwendungen in der Kombinatorik gefunden. Ein aktuelles Beispiel ist die Arbeit „Complexes of graph homomorphisms" von Eric Babson und Dmitry

Kozlov [1]. Selbst einige Methoden der Differentialtopologie haben ihr kombinatorisches Analogon gefunden, z. B. in der Entwicklung der *diskreten Morsetheorie* durch Robin Forman.
Einige der Anwendungen seien hier kurz genannt. Allen voran stehen *Graphenfärbungsprobleme*. Inzwischen gibt es eine Vielzahl von Schranken für die chromatische Zahl eines Graphen bzw. Hypergraphen, die mit topologischen Methoden bewiesen wurden. Ferner seien *Partitionsresultate* verschiedenster Couleur wie z. B. das *Perlenkettenproblem* genannt, welches von Noga Alon in seiner vollen Allgemeinheit 1987 gelöst wurde. Mit topologischen Methoden wurden *Komplexitätsprobleme*, wie z. B. die Komplexität linearer Entscheidungsbäume und die Komplexität von monotonen Grapheneigenschaften im Zusammenhang mit der sogenannten *Evasivenessvermutung* behandelt. Ein weiterer großer Komplex ist die *Topologie von Halbordnungen.* Der schwedische Mathematiker Anders Björner hat zu Beginn der 80er Jahre das Konzept der Schälbarkeit von Halbordnungen eingeführt. Einer Halbordnung läßt sich auf natürliche Weise ein Simplizialkomplex und damit ein topologischer Raum zuordnen. Die von Björner definierte Schälbarkeit einer Halbordnung hat zur Folge, dass der entsprechend zugeordnete topologische Raum bis auf Homotopie ein Bouquet von Sphären ist. Dieses kombinatorische Konzept mit seinen topologischen Konsequenzen fand vielfältige Anwendungen, unter anderem in der Theorie der Bruhatordnungen und Fragestellungen der algebraischen Kombinatorik. Es sei bemerkt, dass sich mit dem Schälbarkeitskonzept leicht zeigen läßt, dass der im Lovász-Beweis der Kneservermutung betrachtete Nachbarschaftskomplex $\mathcal{N}(KG_{n,k})$ den erforderlichen $(n-2k-1)$-Zusammenhang aufweist.

Zurück zur Kombinatorik

Seitdem kombinatorische Sätze mit topologischen Methoden bewiesen wurden, stand die Frage im Raum, ob sich das topologische Argument nicht auch durch ein kombinatorisches ersetzen ließe. Ein erster Durchbruch in dieser Richtung gelang Jiří Matoušek im Jahr 2000 mit einem kombinatorischen Beweis der Kneservermutung [9], der auf einem Spezialfall eines kombinatorischen Lemmas (aus der kombinatorischen Topologie) von Tucker beruht, welches im wesentlichen äquivalent zum Satz von Borsuk–Ulam ist. Auch bei der Konstruktion von Approximationsalgorithmen im Zusammenhang mit dem *gerechten Teilen von Kuchen* und verwandten Fragestellungen finden die kombinatorischen Verwandten des Satzes von Borsuk–Ulam inzwischen ihre Anwendung. Ferner haben die konkreten Fragestellungen in der diskreten Mathematik den Bedarf an explixiten Methoden zur Berechnung von Homologiegruppen und anderen Invarianten von Simplizialkomplexen aufgezeigt und zur Entwicklung effizienter Programme zur Berechnung dieser Invarianten geführt.

Wie in der Einleitung erwähnt wurde, führte die kombinatorische Topologie zur Entstehung der algebraischen Topologie. Der Begriff der algebraischen Topologie wurde scheinbar zum ersten mal in einer Rede von Solomon Lefschetz an der Duke Universität im Jahr 1936 festgehalten (siehe [5]):

> The assertion is often made of late that all mathematics is composed of algebra and topology. It is not so widely realized that the two subjects interpenetrate so that we have an algebraic topology as well as a topological algebra.

Letzteres ist nun auch für die Kombinatorik und die Topologie wahr geworden.

Literatur

[1] Eric Babson and Dmitry N. Kozlov. Complexes of graph homomorphisms. `http://arXiv.org/abs/math/0310056`, Preprint 2003.

[2] Anders Björner. Topological methods. In R. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász, Editoren, *Handbook of Combinatorics*, Seiten 1819–1872. North Holland, Amsterdam, 1994.

[3] Albrecht Dold. Simple proofs of some Borsuk–Ulam results. *Contemp. Math.*, 19: 65–69, 1983.

[4] Joshua Greene. A new short proof of Kneser's conjecture. *Amer.Math.Monthly*, 109: 918–920, 2002.

[5] Ioan M. James. From Combinatorial Topology to Algebraic Topology. In I. M. James, Editor, *History of Topology*, Seiten 561–573. North Holland, Amsterdam, 1999.

[6] Martin Kneser. Aufgabe 360. *Jahresbericht der DMV*, 58(2): 27, 1955.

[7] László Lovász. Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy. *J. Combinatorial Theory, Ser. A*, 25: 319–324, 1978.

[8] Jiří Matoušek. *Using the Borsuk–Ulam Theorem. Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Written in cooperation with Anders Björner and Günter M. Ziegler.* Universitext, Springer, Heidelberg, 2003.

[9] Jiří Matoušek. A combinatorial proof of Kneser's conjecture. *Combinatorica*, Preprint 2000, erscheint demnächst.

[10] Jiří Matoušek and Günter M. Ziegler. Topological lower bounds for the chromatic number: A hierarchy. *Jahresbericht der DMV*, Preprint 2003, erscheint demnächst.

[11] Erich Ossa. *Topologie.* Vieweg Studium 42, Aufbaukurs Mathematik. Vieweg, 1992.

[12] Rade T. Živaljević. Topological methods. In Jacob E. Goodman et al., Editoren, *Handbook of discrete and computational geometry*, Seiten 305–329. CRC Press, Second edition, 2004.

Adresse des Autors
Dr. Mark de Longueville
Fachbereich Mathematik
Freie Universität Berlin
Arnimallee 3–5
14195 Berlin
`delong@math.fu-berlin.de`