# 5. Übung zur Vorlesung „Algebra“

Sommersemester 2005

Mark de Longueville
Anja Krech

Ausgabe: 19.05.05
Abgabe: 31.05.05

---

**Aufgabe 1**

(a) Bestimme alle transitiven Untergruppen von $S_4$ der Ordnung 24, 12, 8 oder 4 und bestimme den jeweiligen Isomorphietyp.

(b) Verifiziere, dass $V \leq D$ für alle $D \leq S_4$ der Ordnung $|D| = 8$.

**Aufgabe 2**

Sei $f = x^4 + ax^2 + b \in K[x]$, $\mathrm{char} K \neq 2$, irreduzibel und $G = \mathrm{Gal}(f)$. Zeige:

(a) Ist $b$ ein Quadrat in $K$, so ist $G = V$.

(b) Ist $b$ kein Quadrat in $K$ und $b(a^2 - 4b)$ ist ein Quadrat in $K$, so ist $G \cong \mathbb{Z}_4$.

(c) Ist weder $b$ noch $b(a^2 - 4b)$ ein Quadrat in $K$, so ist $G \cong D_4$.

**Aufgabe 3**

Bestimme die Galoisgruppen der folgenden Polynome über den angegebenen Körpern:

(a) $x^4 - 5$ über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{5})$

(b) $(x^3 - 2)(x^2 - 5)$ über $\mathbb{Q}$,

(c) $x^3 - x - 1$ über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{23})$,

(d) $x^3 - 10$ über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$,

(e) $x^4 + 3x^3 + 3x - 2$ über $\mathbb{Q}$,

(f) $x^5 - 6x + 3$ über $\mathbb{Q}$,

(g) $x^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$,

(h) $x^4 - 4x^2 + 5$ über $\mathbb{Q}$,

(i) $x^4 + 2x^2 + x + 3$ über $\mathbb{Q}$.

Bitte wenden!

**Aufgabe 4**

Sei $K \leq \mathbb{R}$, $f \in K[x]$ irreduzibel, $\operatorname{grad} f = 4$. Zeige:

(a) Hat $f$ genau zwei reelle Nullstellen, so ist $\operatorname{Gal}(f)$ isomorph zu $S_4$ oder $D_4$.

(b) Hat $f$ keine reellen Nullstellen, so kann $G$ nicht isomorph zu $\mathbb{Z}_4$ sein.