10. Übungsblatt zur Einführung in die diskrete Mathematik WS 2005

Mark de Longueville

Abgabe bis Montag 16.1., 12:00.

Aufgabe 1.
Auf wieviele Möglichkeiten bis auf Symmetrie lassen sich die zwölf Kanten des Würfels mit genau zwölf verschiedenen Farben färben?

Aufgabe 2.
Wieviele verschiedene Möglichkeiten bis auf Symmetrie gibt es, die Seitenflächen des Würfels so zu färben, daß genau drei Seiten blau, zwei rot und eine gelb gefärbt sind?

Aufgabe 3.
Es seien $A = [n]$, $B = \{0, 1\}$ und G eine Gruppe, die auf A operiert. Wir nennen eine Färbung $f : A \to B$ *selbstdual*, falls f und $\bar{f}$ im selben G-Orbit liegen, wobei $\bar{f}$ durch $\bar{f}(a) = 1 - f(a)$ definiert ist.
Zeige:

a) Es sei O ein G-Orbit der G-Operation auf B^A. Dann sind entweder alle $f \in O$ selbstdual oder kein einziges.
Einen Orbit, in dem alle Elemente selbstdual sind, nennen wir ebenfalls selbstdual.
b) Die Anzahl m der selbstdualen Orbits ist gleich $Z_G(0, 2, 0, 2, \ldots)$.

Hinweis zu b): Zeige zunächst mit Hilfe des Lemmas von Burnside, daß

$$m = \frac{1}{|G|} \sum_{M \in \bar{M}} \sum_{g \in G} |\{f \in M : gf = f\}|$$

gilt, wobei $\bar{M}$ die Menge der selbstdualen Orbits sei. Zeige dann mit Hilfe dieser Gleichung die Identität

$$m = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\{f \in B^A : gf = \bar{f}\}|.$$

Diese führt mit der üblichen Betrachtung der Zyklenzerlegungen der $g \in G$ zum Ziel.

Aufgabe 4.

a) Die Voraussetzungen seien wie in Aufgabe 3). Es seien

$o_g = \#$ Orbits in denen die Färbungen eine gerade Anzahl von Nullen haben,
$o_u = \#$ Orbits in denen die Färbungen eine ungerade Anzahl von Nullen haben.

Zeige, daß $m = o_g - o_u$ gilt.
b) Wieviele selbstduale 0/1-Folgen-Orbits gibt es auf dem Kreis bezüglich der $\mathbb{Z}_n$-Symmetrie? Illustriere die Fälle $n = 6, 8$. Welche Formel ergibt sich im Fall $n = 2^k$?

Aufgabe 5. (freiwillig)
Läßt sich die Identität $m = o_g - o_u$ ohne Polya–Theorie direkt beweisen?