11. Übungsblatt zur Einführung in die diskrete Mathematik WS 2005

Mark de Longueville

Abgabe bis Montag 23.1., 12:00.

Aufgabe 1.
In der Vorlesung wurde gezeigt, daß sich zu einer projektiven Ebene $n$ter Ordnung $n-1$ paarweise orthogonale lateinische Quadrate $n$ter Ordnung konstruieren lassen. Gib die Umkehrabbildung an.

Aufgabe 2.
Drei Punkte in einer projektiven Ebene, die nicht auf einer Geraden liegen, nennen wir *Dreieck.* Es sei $\mathcal{P}^q$ die projektive Ebene der Ordnung q definiert über dem Körper $GF(q)$. Zeige, daß es in $\mathcal{P}^q$ $\frac{1}{6}q^3(q+1)(q^2+q+1)$ Dreiecke gibt.

Aufgabe 3.
$\mathcal{P}$ sei eine projektive Ebene der Ordnung n. $\mathcal{A}$ entstehe aus $\mathcal{P}$ durch Entfernen einer Geraden zusammen mit allen Punkten, die auf dieser Geraden liegen.
a) Zeige, daß $\mathcal{A}$ ein $(n^2, n, 1)$-Design ist. Ein $(n^2, n, 1)$-Design nennen wir auch *affine Ebene der Ordnung* n.
b) Zeige, daß die Geraden einer affinen Ebene in $n + 1$ Klassen eingeteilt werden können, so daß je zwei Geraden sich genau dann schneiden, wenn sie in verschiedenen Klassen liegen.
c) Zeige, daß die Fano–Ebene bis auf Umbenennung der Punkte die einzige projektive Ebene der Ordnung 2 ist.
d) Zeige, daß es bis auf Umbenennung der Punkte genau eine affine Ebene der Ordnung 3 gibt.

Aufgabe 4.
$\mathcal{P} = (X, \mathcal{B})$ sei eine projektive Ebene der Ordnung n. Konstruiere den bipartiten Graphen $G = (X \cup \mathcal{B}, E)$ via $xB \in E :\Longleftrightarrow x \in B$.
a) Zeige, daß G $(n+1)$-regulär ist und Taillenweite 6 hat.
b) Zeige, daß ein $(n + 1)$-regulärer Graph mit Taillenweite 6 mindestens so viele Ecken wie G hat.