2. Übungsblatt zur Einführung in die diskrete Mathematik WS 2005

Mark de Longueville

Abgabe: bis Montag 7.11., 12:00 ins Fach von Dana Woitas

Aufgabe 1.

Sei e eine Kante des vollständigen Graphen K_n. Bestimme die Anzahl der aufspannenden Bäume des Graphen $K_n \setminus e$.

Aufgabe 2.

Sei G ein gerichteter Graph mit Ecken $x_1, \ldots, x_n$ für den eine gerichtete Eulertour existiert. Eine *aufspannende Arboreszenz mit Wurzel* x_i ist ein aufspannender Baum mit Wurzel x_i, so daß für alle $j \neq i$ ein gerichteter Weg von x_j nach x_i existiert. Zeige, daß die Anzahl A_i der aufspannenden Arboreszenzen von G mit Wurzel x_i nicht von i abhängt.

Anleitung: Sei r_j die Anzahl der von Ecke x_j ausgehenden Kanten. Zeige, daß die Anzahl der verschiedenen Eulertouren gleich $A_i \prod_{j=1}^{n}(r_j - 1)!$ ist. Betrachte hierfür eine aufspannende Arboreszenz. Versehe nun auf geeignete Weise die ausgehenden Kanten in jeder Ecke x_j mit den Labels $\{1, \ldots, r_j\}$, so daß diese eine eindeutige Eulertour definieren.

Aufgabe 3.

Eine Variation des Greedy–Algorithmus. Sei G zusammenhängender, gewichteter Graph. Sei x_1 eine beliebige Ecke von G und T_1 der kantenlose Untergraph, der nur aus der Ecke x_1 besteht. Definiere nun Bäume $T_2, \ldots, T_n$ induktiv wie folgt. Sei $k < n$ und T_k bereits definiert. Sei e_k die Kante kleinsten Gewichts, die eine Ecke in $V(T_k)$ und eine Ecke in $V(G) \setminus V(T_k)$ besitzt. Die Ecke von e_k in $V(G) \setminus V(T_k)$ nennen wir x_{k+1}. Sei dann T_{k+1} der Baum, der aus T_k durch hinzufügen von e_k und x_{k+1} hervorgeht. Zeige, daß T_n ein aufspannender Baum kleinsten Gewichts ist.

Aufgabe 4.

Sei G ein Graph, dessen ungerade Kreise sich paarweise schneiden. Zeige, daß G chromatische Zahl kleiner gleich 5 hat.