6. Übungsblatt zur Einführung in die diskrete Mathematik WS 2005

Mark de Longueville

Abgabe bis Montag 5.12., 12:00.

Aufgabe 1.

a) Gib einen bijektiven Beweis der folgenden Identität.

$$\binom{n+1}{a+b+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{a}\binom{n-k}{b}$$

b) Die *Bellzahl* B_n ist die Anzahl aller Partitionen einer n-elementigen Menge in nicht-leere Teilmengen, also $B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$. Gib einen bijektiven Beweis der folgenden Identität.

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Aufgabe 2.

a) Betrachte die Menge der geordneten Paare (A, B), $A, B \subseteq [n]$ und $A \cap B = \emptyset$. Finde deren Anzahl auf mindestens zwei verschiedene Arten. Wieviele ungeordnete Paare $\{A, B\}$ mit der gleichen Eigenschaft gibt es?
b) Wie groß ist die Stirlingzahl zweiter Art $S(n, n-2)$?

Aufgabe 3.

Es sei $\mathcal{S}$ die Menge aller k-Tupel $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_k)$ mit $A_1, \dots, A_k \subseteq [n]$. Bestimme auf mindestens zwei verschiedene Arten

$$\sum_{\mathcal{A} \in \mathcal{S}} |A_1 \cup \dots \cup A_k|.$$

Aufgabe 4.

Es seien $n \geq 1$, $k \geq 0$. Zeige mit Hilfe einer Bijektion, daß die Anzahl der Folgen $(a_1, \dots, a_n)$ mit $0 \leq a_i \leq n - i$, $i = 1, \dots, n$, mit genau k Nulleinträgen gleich der vorzeichenlosen Stirlingzahl erster Art $c(n, k)$ ist.