Bedingte Erwartung – Endlicher Fall

Mark de Longueville und Marc Pfetsch

1 Allgemeine Begriffe

Gegeben sei ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, d. h., Ω ist eine endliche Menge, $\mathcal{F}$ ist eine σ-Algebra und $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ ein zugehöriges Wahrscheinlichkeitsmaß. (Natürlich besteht in diesem Fall kein Unterschied zwischen σ-Algebren und Algebren.)

Seien $F_1, \ldots, F_n$ die inklusionsminimalen nichtleeren Mengen in $\mathcal{F}$. Weil $\mathcal{F}$ abgeschlossen unter Schnittmengenbildung ist, sind diese Mengen paarweise disjunkt. Weil $\mathcal{F}$ abgeschlossen unter Komplementbildung ist, überdecken sie Ω. Damit bildet $(F_1, \ldots, F_n)$ die von $\mathcal{F}$ *induzierte Partition* von Ω. Zur Erinnerung: die Mengen $F_1, \ldots, F_n$ sind die kleinsten nichtleeren Mengen F für welche die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(F)$ definiert ist; weiterhin kann jedes $F \in \mathcal{F}$ als Vereinigung dieser Mengen erhalten werden. Eine σ-Algebra speichert also Information: $\mathcal{F} = 2^\Omega$ (die Potenzmenge von Ω) heißt man „weiß Alles“ (insbesondere ist $\mathbb{P}(\{\omega\})$ für jedes $\omega \in \Omega$ definiert); $\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega\}$ heißt man „weiß Nichts“ (nur $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ und $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ sind bekannt). In der Regel kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $|F_i| = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt (man identifiziert die Elemente jedes F_i miteinander). Mit dieser Annahme ist $P(\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega$ definiert. Wie üblich schreiben wir $\mathbb{P}(\omega)$ für $\mathbb{P}(\{\omega\})$.

Sei $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Dann vergröbert die von $\mathcal{F}'$ induzierte Partition $(F'_1, \ldots, F'_m)$ die Partition $(F_1, \ldots, F_n)$; dies bedeutet, dass jedes F'_i die Vereinigung von Mengen aus $(F_1, \ldots, F_n)$ ist, wobei jede Menge F_i genau einmal auftritt. Insbesondere gilt:

$$\mathbb{P}(F'_i) = \sum_{F_i \subseteq F'_i} \mathbb{P}(F_i),$$

wobei $\mathbb{P}$ weiterhin bzgl. $\mathcal{F}$ definiert ist.

Nun sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable für $\mathcal{F}$, d. h. $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ für alle Borelmengen $B \subseteq \mathbb{R}$, wir sagen auch X ist $\mathcal{F}$-*messbar*.

Die folgenden beiden Abschnitte 2 und 3 vollziehen die Abschnitte 2.5 und 2.6 in „Risk-Neutral Valuation“ von Bingham und Kiesel im endlichen Fall nach.

2 Bedingte Erwartungswerte

Wir nehmen im Folgenden o. E. an, dass $\mathbb{P}(\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega$ definiert ist, d. h. die inklusionsminimalen nichtleeren Mengen von $\mathcal{F}$ haben Kardinalität 1.

Sei X eine Zufallsvariable bzgl. $\mathcal{F}$. Für eine Unter-σ-Algebra $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ soll die *bedingte Erwartung* „messen“ wieviel man über $\mathbb{E}(X)$ weiß, wenn man X nur bzgl. $\mathcal{F}'$ „kennt“. Dies bedeutet, dass die bedingte Erwartung Z eine Zufallsvariable bzgl. $\mathcal{F}'$ (statt $\mathcal{F}$) sein soll und auf Mengen von $\mathcal{F}'$ die gleiche Information wie $\mathbb{E}(X)$ besitzt. Also soll Z folgende Eigenschaft erfüllen:

$$\sum_{\omega \in F} X(\omega)\, \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in F} Z(\omega)\, \mathbb{P}(\omega) \qquad \text{für alle } F \in \mathcal{F}'. \tag{*}$$

In der folgenden Definition betrachten wir einen Kandidaten für die bedingte Erwartung.

Definition. *Für $\omega \in \Omega$ sei $F_\omega = \bigcap\{F \in \mathcal{F}' : \omega \in F\} \in \mathcal{F}'$. Definiere die Abbildung $E(X \mid \mathcal{F}') : \Omega \to \mathbb{R}$ durch*

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(F_\omega)} \sum_{\tau \in F_\omega} X(\tau)\, \mathbb{P}(\tau) = \sum_{\tau \in F_\omega} X(\tau)\, \frac{\mathbb{P}(\tau)}{\mathbb{P}(F_\omega)},$$

falls $\mathbb{P}(F_\omega) > 0$ und $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(\omega) = X(\tau)$ für ein beliebiges $\tau \in F_\omega$ (unabhängig von X) anderenfalls.

Für jedes $\omega \in \Omega$ ist F_ω die Menge in der induzierten Partition von $\mathcal{F}'$, welche ω enthält.

Lemma 2.1. *$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')$ ist eine Zufallsvariable bzgl. $\mathcal{F}'$.*

Beweis. Wir müssen beweisen, dass für alle Borelmengen $B \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')^{-1}(B) \in \mathcal{F}'.$$

Sei $(F'_1, \ldots, F'_m)$ die induzierte Partition bzgl. $\mathcal{F}'$. Wenn $\omega, \omega' \in F'_i$, für ein $i \in \{1, \ldots, m\}$, dann gilt per Definition $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(\omega) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(\omega')$ (weil $F_\omega = F_{\omega'} = F'_i$ gilt). Dies bedeutet, dass $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')^{-1}(B)$ die Vereinigung von Mengen in $(F'_1, \ldots, F'_m)$ ist, also in $\mathcal{F}'$ liegt (weil $\mathcal{F}'$ eine σ-Algebra ist). $\square$

Proposition 2.2. *Eine Zufallsvariable Z bzgl. $\mathcal{F}'$ erfüllt Eigenschaft (*) genau dann, wenn $Z(\omega) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ mit $\mathbb{P}(F_\omega) > 0$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')$ Eigenschaft (*) erfüllt. Sei dazu $F \in \mathcal{F}'$. Zunächst gilt (*), falls $\mathbb{P}(F) = 0$. Sei also im Folgenden $\mathbb{P}(F) > 0$.

Seien $F'_1, \ldots, F'_k$ die Mengen der induzierten Partition bzgl. $\mathcal{F}$ welche in F enthalten sind (F muss Vereinigung solcher Mengen sein, weil $F \in \mathcal{F}'$). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega \in F} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(\omega)\, \mathbb{P}(\omega) &= \sum_{\omega \in F} \Big(\frac{1}{\mathbb{P}(F_\omega)} \sum_{\tau \in F_\omega} X(\tau)\, \mathbb{P}(\tau) \Big) \mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{\sigma \in F'_i} \Big(\frac{1}{\mathbb{P}(F'_i)} \sum_{\tau \in F'_i} X(\tau)\, \mathbb{P}(\tau) \Big)\, \mathbb{P}(\sigma) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{\tau \in F'_i} X(\tau)\, \mathbb{P}(\tau) = \sum_{\omega \in F} X(\omega)\, \mathbb{P}(\omega),
\end{aligned}$$

womit Eigenschaft (*) gezeigt ist.

Sei nun Z eine Zufallsvariable bzgl. $\mathcal{F}'$ und erfülle Eigenschaft (*). Für $F \in \mathcal{F}'$ gilt also:

$$\sum_{\omega \in F} Z(\omega)\, \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in F} X(\omega)\, \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in F} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(\omega)\, \mathbb{P}(\omega).$$

Nach Lemma 2.1 ist $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')$ eine Zufallsvariable bzgl. $\mathcal{F}'$ und daher insbesondere konstant auf allen Mengen der induzierten Partition bzgl. $\mathcal{F}'$; dasselbe gilt für Z nach Voraussetzung. Wenn F eine dieser Mengen ist und $\omega \in F$, so folgt:

$$Z(\omega) \sum_{\tau \in F} \mathbb{P}(\tau) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(\omega) \sum_{\tau \in F} \mathbb{P}(\tau) \quad \Leftrightarrow \quad Z(\omega) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(\omega),$$

solange $\mathbb{P}(F) > 0$. Dies zeigt die Behauptung. $\square$

3 Eigenschaften der Bedingten Erwartung

1. $\mathcal{F}' = \{\varnothing, \Omega\}$, d. h. wir „wissen Nichts“. Dann gilt: $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(\omega) = \mathbb{E}(X)$ für alle $\omega \in \Omega$. Dies folgt, weil $F_\omega = \Omega$ und

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(\omega) = \sum_{\tau \in \Omega} X(\tau) \frac{\mathbb{P}(\tau)}{\mathbb{P}(\Omega)} = \sum_{\tau \in \Omega} X(\tau)\, \mathbb{P}(\tau) = \mathbb{E}(X).$$

2. $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$, d. h. wir „wissen Alles“. In diesem Fall gilt: $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}') = X$, denn $F_\omega = \{\omega\}$ und damit (falls $\mathbb{P}(\omega) > 0$):

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(\omega) = \sum_{\tau \in \{w\}} X(\tau) \frac{\mathbb{P}(\tau)}{\mathbb{P}(\omega)} = X(\omega).$$

   Für $\mathbb{P}(\omega) = 0$ gilt die Gleichung nach Konstruktion.

3. Falls X bzgl. $\mathcal{F}'$ eine Zufallsvariable ist, dann ist X konstant auf F_ω. Damit gilt:

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(\omega) = \sum_{\tau \in F_\omega} X(\tau) \frac{\mathbb{P}(\tau)}{\mathbb{P}(F_\omega)} = X(\omega) \sum_{\tau \in F_\omega} \frac{\mathbb{P}(\tau)}{\mathbb{P}(F_\omega)} = X(\omega),$$

   falls $P(F_\omega) > 0$ ist. Für $P(F_\omega) = 0$ gilt dies nach Definition.

4. Wenn wieder X bzgl. $\mathcal{F}'$ eine Zufallsvariable ist, dann beweist man ähnlich wie in 3, dass $\mathbb{E}(X\,Y \mid \mathcal{F}') = X\,\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}')$, wo Y eine Zufallsvariable (bzgl. $\mathcal{F}$) ist. Der Fall $\mathbb{P}(F_\omega) = 0$ gilt, weil die Wahl von $\tau \in F_\omega$ mit $\mathbb{E}(X\,Y \mid \mathcal{F}') = X(\tau)\,Y(\tau)$ unabhängig von X und Y ist.

5. Sei $\mathcal{F}'' \subseteq \mathcal{F}'$ eine σ-Unteralgebra. Dann gilt:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}') \mid \mathcal{F}'')(\omega) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}'')(\omega) \quad \text{für alle } \omega \in \Omega \text{ mit } \mathbb{P}(F_\omega) > 0,$$

   (wobei $F_\omega \in \mathcal{F}''$). Denn mit Eigenschaft (*) ergibt sich für $F \in \mathcal{F}''$:

$$\sum_{\omega \in F} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}') \mid \mathcal{F}'')\, \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in F} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')\, \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in F} X(\omega)\, \mathbb{P}(\omega).$$

   Also erfüllt $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}') \mid \mathcal{F}'']$ Eigenschaft (*) bzgl. $\mathcal{F}''$ und nach Proposition 2.2 folgt die Behauptung.

6. Mit den Voraussetzungen von 5 gilt: $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}'') \mid \mathcal{F}'] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}'']$. Da $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}'')$ eine Zufallsvariable bzgl. $\mathcal{F}''$ (und damit bzgl. $\mathcal{F}'$) ist, folgt die Behauptung mit 3.

7. Es gilt: $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')) = \mathbb{E}(X)$. Dies rechnet man folgendermaßen nach, wobei $(F_1, \ldots, F_m)$ die von $\mathcal{F}'$ induzierte Partition sei:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')) &= \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(\omega)\, \mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} \Big(\sum_{\tau \in F_\omega} X(\tau)\, \frac{\mathbb{P}(\tau)}{\mathbb{P}(F_\omega)} \Big) \mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} \frac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}(F_\omega)} \Big(\sum_{\tau \in F_\omega} X(\tau)\, \mathbb{P}(\tau) \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{\omega \in F_i} \frac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}(F_i)} \Big) \Big(\sum_{\tau \in F_i} X(\tau)\, \mathbb{P}(\tau) \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{\tau \in F_i} X(\tau)\, \mathbb{P}(\tau) \Big) \\
&= \mathbb{E}(X).
\end{aligned}$$

3.1 Beispiel

Als Beispiel betrachten wir den Würfel, d. h.

$$\begin{aligned}
&\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}, \\
&\mathcal{F} = \sigma(\{1\}, \{2\}, \ldots, \{6\}) = 2^\Omega \\
&\mathbb{P}(\omega) = \tfrac{1}{6} \qquad \text{für } \omega \in \Omega.
\end{aligned}$$

Als Zufallvariable wählen wir die Augenzahl, d. h. $X(\omega) = \omega$. Sei

$$\mathcal{F}' = \sigma(\text{„Augenzahl gerade“}) = \{\varnothing, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}.$$

Es gilt

$$F_\omega = \begin{cases} \{1, 3, 5\} \cap \Omega = \{1, 3, 5\} & \omega \text{ ungerade} \\ \{2, 4, 6\} \cap \Omega = \{2, 4, 6\} & \omega \text{ gerade} \end{cases}$$

und $\mathbb{P}(F_\omega) = \frac{1}{2}$. Damit erhält man:

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(w) = \begin{cases} 2 \cdot (\frac{1}{6} + \frac{3}{6} + \frac{5}{6}) = 3 & \omega \text{ ungerade} \\ 2 \cdot (\frac{2}{6} + \frac{4}{6} + \frac{6}{6}) = 4 & \omega \text{ gerade} \end{cases}$$

Also folgt z. B.:

$$\mathbb{E}(X \mid X \in \{2,4,6\}) = \mathbb{E}(X \mid \sigma(\{2,4,6\}))(\omega) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(\omega) = 4,$$

wo ω irgendeine gerade Augenzahl ist.