Risikoneutrales Bewerten

Wie werden Derivate mittels unserer Martingalmaße bewertet? Und wann geht das überhaupt?

Übersicht

- Einführung
- Wiederholung
- Definition: „Nachbildende Strategie“
  - Eindeutigkeit der Wertentwicklung
- Definition: „Arbitrage-Preis“
- Risikoneutrale Bewertungsformel
  - Motivation
  - Beweis
- Definition: „Vollständiger Markt“ $\Leftrightarrow$ $\exists!$Nachbildende Strategie $\Leftrightarrow$ $\exists!$Martingalmaß (Vorschau)

Einführung

- Haben uns bisher nur mit selbstfinanzierenden Strategien ($\varphi \in \Phi$) beschäftigt

  Wir handeln doch nicht!
- Wollen Derivate bewerten, nicht Strategien
- Und diese möglichst richtig, sonst …

Die NatWest Market Geschichte

- März bis Dezember 1995 bewertet ein DM-Kurs-Händler bei NatWest seine Optionen falsch
- Er hatte die implizite Volatilität falsch geschätzt.
- Um von seinem Fehler abzulenken, manipuliert er sogar noch die Swapkurse.
- Letztendlich belief sich der Schaden auf 90,5 Mill. Pfund

Wiederholung

Ein Bezugsrecht (*contingent claim*) X mit Fälligkeitstag T ist eine beliebige, nicht-negative, $\mathcal{F}_T$-messbare ZV. Die Menge aller solcher ZV sei mit $\mathcal{X}^+$ bezichnet.

- Normalerweise ist dies eine Funktion von einem bzw. mehreren Wertpapieren (*underlyings*).
  - Beispiel europäischer Call:

$$X = (S(T) - K)^+$$

Definition: (Nachbildende Strategie)

Eine *nachbildende Strategie* zu einem Bezugsrecht X nennen wir jede selbstfinanzierende Strategie $\varphi \in \Phi$ mit $V_\varphi(T) = X$. X heißt dann *darstellbar*.

- Die nachbildende Strategie generiert also zur Zeit T denselben Cash-Flow,

➥ also erwarten wir den gleichen auch für t<T !

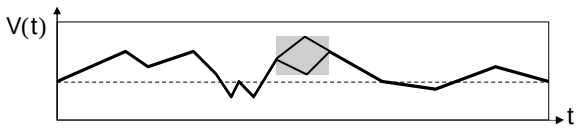
Eindeutigkeit

- Das versucht uns, den Wert von X über die nachbildende Strategie zu definieren…
- Dürfen wir das?
  - Sicher nur, wenn für zwei verschiedene Strategien die (diskontierte) Wertentwicklung gleich ist.
  - ➥Wir haben die Eindeutigkeit zu zeigen!

Satz: (Eindeutigkeit der Wertentwicklung)

Angenommen ein Markt $\mathcal{M}$ ist arbitragefrei, dann wird jedes darstellbare X eindeutig nachgebildet.

- D.h.: die Wertentwicklungen aller nachbildender Strategien sind gleich!



Definition: Arbitrage-Preis

- Nun haben wir die Möglichkeit zu folgender Definition:

  Sei X ein darstellbares Bezugsrecht in einem arbitragefreien Markt, dann ist der *Arbitrage-preisprozess* $\pi_X(t)$, für $0 \leq t \leq T$, gegeben durch die (eindeutige) Wertentwicklung jeder nachbildenden Strategie.

Arbitrage-Preis

- Nächste Vorträge:
  - Wann kann man eine passende Strategie finden?
  - Konstruktion einer solchen Strategie
- Aber können wir auch ohne die Strategie auskommen?

Risikoneutrale Bewertung

- Bisher haben wir einzig Gier für den Markt gefordert
  ➥ Arbitragefreiheit
- Der Emittent müsste sich für das Risiko fair entschädigen lassen (Preis d. Option)
  - Erwartungswert bzgl. realer W'keiten negativ
  - ➥ Entspr. Entschädigung fällig
- Drehen wird dies um:
  - Erwartungswert 0 bzgl. risikoneutraler W'keiten
- Risikoneutrale Händler bewerteten das Derivat nur nach Erwartungswert!

Satz: (Risikoneutrale Bewertung)

Für den Arbitragepreisprozess jeder darstellbaren Eventualforderung X gilt:

$$\pi_x(t) = \beta(t)^{-1}\mathbb{E}^*(X\beta(T) \mid \mathcal{F}_t)$$

Die sog. **Risikoneutrale Bewertungs-Formel**.

- Da der Markt als arbitragefrei angenommen wird, existiert ein Martingalmaß.
- Die diskontierte Wertentwicklung einer nachbildenden Strategie ist somit ein Martingal.

Definition: Vollständiger Markt

- Was können wir mehr verlangen als ein Bezugsrecht immer durch eine Strategie nachbilden zu können?

Einen Markt nennen wir *vollständig*, falls jedes Bezugsrecht darstellbar ist; wir also zu jeder $\mathcal{F}_T$-messbaren ZV eine nachbildende Strategie $\varphi \in \Phi$ finden können mit $V_\varphi(T) = X$.

Vorschau

Was fehlt uns noch?

- Wir haben:
  1. $\mathcal{M}$ arbitragefrei

     $\Rightarrow \exists\ \boldsymbol{P}^*$ äquiv. Martingalmaß
- Aber es steht noch aus:
  2. $\mathcal{M}$ vollständig

     $\Rightarrow \boldsymbol{P}^*$ ist eindeutig

Dann können wir uns ans rechnen machen…