- Betrachten festen Zeitraum $[0, T]$.

- Für jedes $n \in \mathbb{N}$: CRR–Modell mit $k_n$ Handelszeitpunkten und Zeitintervallen $\Delta_n = \frac{T}{k_n}$.

- Zinsrate $r \in \mathbb{R}_+$. Definieren Zinsrate $r_n$ im $n$ten Modell durch $1 + r_n = e^{r\Delta_n}$, damit gilt $(1 + r_n)^{k_n} = e^{rT}$.

- Wir *wählen* ein festes $\sigma \in \mathbb{R}_+$ und definieren

$$u_n = e^{\sigma\sqrt{\Delta_n}} \quad \& \quad d_n = u_n^{-1} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}.$$

- Im $n$ten CRR-Modell steigt der Preis $S(t)$ des Wertpapiers von Zeit $t$ zu Zeit $t + \Delta_n$ auf $u_n S(t)$ mit Wahrscheinlichkeit $p_n$ und fällt auf $d_n S(t)$ mit Wahrscheinlichkeit $1 - p_n$.

**Satz.** Für die Arbitragepreise $C_n(0)$ einer Europäischen Call-Option im $n$ten CRR-Modell mit Fälligkeit $T$ und Ausübungspreis $K$ bzgl. dem Wertpapier $S$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} C_n(0) = C_{BS}(0),$$

wobei $C_{BS}(0)$ durch die folgende *Black-Scholes-Formel* gegeben ist:

$$C_{BS}(0) = S \cdot N(d_1(S,T)) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2(S,T)).$$

Dabei ist $S = S(0)$, $N$ die Standard-Normalverteilung und

$$d_1(s,t) = \frac{\log(s/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) t}{\sigma \sqrt{t}},$$

$$d_2(s,t) = \frac{\log(s/K) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t}{\sigma \sqrt{t}}.$$

**Beweisskizze:**

1. $a_n := \min\{j \in \mathbb{N}_0 \ : \ S\, u_n^j\, d_n^{k_n - j} > K\}$.

   $a_n$ ist der kleinste Wert von $j$ für den $(S\, u_n^j d_n^{k_n-j} - K)^+ > 0$.

2. Der Arbitragepreis der Option im $n$ten Modell ist also

$$C_n(0) = (1+r_n)^{-k_n} \sum_{j=a_n}^{k_n} \binom{k_n}{j} q_n^j (1-q_n)^{k_n-j} \left(S\, u_n^j d_n^{k_n-j} - K\right),$$

   wobei $q_n$ das äquivalente Martingalmaß definiert.

3. Umsortieren:

$$C_n(0) = S \Big[ \sum_{j=a_n}^{k_n} \binom{k_n}{j} \left(\frac{q_n\, u_n}{1+r_n}\right)^j \left(\frac{(1-q_n)\, d_n}{1+r_n}\right)^{k_n-j} \Big]$$
$$-(1+r_n)^{-k_n} K \Big[ \sum_{j=a_n}^{k_n} \binom{k_n}{j} q_n^j (1-q_n)^{k_n-j} \Big].$$

3. Umsortieren:

$$C_n(0) = S\,\Big[\sum_{j=a_n}^{k_n} \binom{k_n}{j}\,\left(\frac{q_n\,u_n}{1+r_n}\right)^j \left(\frac{(1-q_n)\,d_n}{1+r_n}\right)^{k_n-j}\Big]$$
$$-(1+r_n)^{-k_n}\,K\Big[\sum_{j=a_n}^{k_n} \binom{k_n}{j}\,q_n^j(1-q_n)^{k_n-j}\Big].$$

Für $\widehat{q}_n = \frac{q_n\,u_n}{1+r_n}$ gilt dann:

$$C_n(0) = S\,\big(1-B^{k_n,\widehat{q}_n}(a_n)\big)-K\,(1+r_n)^{-k_n}\big(1-B^{k_n,q_n}(a_n)\big),$$

mit $B^{k_n,p_n}(\cdot)$ die Binomiale Verteilungsfunktion mit Parameter $k_n$ und $p_n$.

Seien $Y_n$ eine Folge von Binomialverteilten Zufallsvariablen mit Parametern $k_n$ und $p_n$.

Dann ist $1 - B^{k_n,p_n}(a_n) = \mathbb{P}[a_n \leq Y_n \leq k_n]$.

4. Wir transformieren nun die $Y_n$:

$$\widehat{Y}_n = \frac{Y_n - k_n p_n}{\sqrt{k_n\, p_n\, (1 - p_n)}},$$

womit dann $\mathbb{E}(\widehat{Y}_n) = 0$ und $\mathrm{Var}(\widehat{Y}_n) = 1$. Die Grenzen $a_n$ und $k_n$ transformieren sich zu $\alpha_n$ bzw. $\beta_n$, so dass

$$\mathbb{P}[a_n \leq Y_n \leq k_n] = \mathbb{P}[\alpha_n \leq \widehat{Y}_n \leq \beta_n].$$

Für $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ und $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$, gilt nach dem Zentralen Grenzwertsatz:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\alpha_n \leq \widehat{Y}_n \leq \beta_n] = N(\beta) - N(\alpha).$$

5. Für $p_n = \widehat{q}_n$ kann man durch Nachrechnen zeigen, dass $\alpha = -d_1(S,T)$ und $\beta = +\infty$, womit folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left(1 - B^{k_n,\widehat{q}_n}(a_n)\right) &= 1 - N(-d_1(S,T)) \\ &= N(d_1(S,T))\end{aligned}$$

5. Für $p_n = \widehat{q}_n$ kann man durch Nachrechnen zeigen, dass $\alpha = -d_1(S,T)$ und $\beta = +\infty$, womit folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1 - B^{k_n,\widehat{q}_n}(a_n)\right) &= 1 - N(-d_1(S,T)) \\ &= N(d_1(S,T))\end{aligned}$$

Ebenso zeigt man für $p_n = q_n$, dass $\alpha = -d_2(S,T)$ und $\beta = +\infty$, womit gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - B^{k_n,q_n}(a_n)\right) = N(d_2(S,T)).$$

6. Die Black-Scholes-Formel folgt sofort:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} C_n(0) = &\lim_{n\to\infty} S\left(1 - B^{k_n,\widehat{q}_n}(a_n)\right) \\ &- \lim_{n\to\infty} K\,(1+r_n)^{-k_n}\left(1 - B^{k_n,q_n}(a_n)\right) \\ =&S \cdot N(d_1(S,T)) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2(S,T)).\end{aligned}$$