Einleitung

- Das Ein-Perioden-Modell ist das einfachste Modell, um die Idee der Preisgebung von derivaten Finanzinstrumenten (hier: Optionen) zu erklären.

- naive Idee der Optionspreisbestimmung: Erwartungswertprinzip

- No-Arbitrage-Prinzip ($\looparrowright$Duplikationsprinzip) als Grundlage zur Bestimmung des *richtigen* Optionspreises

- Optionspreis kann auch über den Erwartungswert bestimmt werden, allerdings nur bezüglich eines geeigneten Maßes: $\looparrowright$ equivalent martingale measure

Optionspreisbestimmung mit Erwartungewertprinzip

- $S(t)$ Aktienpreis zum Zeitpunkt t
- $C(t)$ Gewinn (payoff) des europäischen Calls zum Zeitpunkt t
- K Ausübungspreis (strike price)
- 2 Zeitpunkte, $t = 0$ und $t = T$

Nun sei $K = 110$, $S(0) = 100$,
$S(T) = 130$ mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.6$ und damit $C(T) = 20$,
$S(T) = 80$ mit Wahrscheinlichkeit $1-p = 0.4$ und somit $C(T) = 0$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(C(T)) = p20 + (1-p)0 = 20p = 12$$

Abzinsen mit $r = 0.03$:

$$C^{EWP}(0) = \frac{12}{1.03} = 11.65$$

$\hookrightarrow$ DIESER OPTIONSPREIS LIEFERT ARBITRAGEMÖGLICHKEITEN

Duplizierendes Portfolio

(↬Duplikationsprinzip)

$S(0) = 100$

Aktion	Geldfluß
verkaufe 1 Call-Option	+11.65
leihe 28.35 Geld	+28.35
kaufe 0.4 Aktien	-40
Balance	0

$S(T) = 130$

Aktion	Geldfluß
verkaufe 1 Aktie(Option)	110
kaufe 0.6 Aktien	-0.6*130 = -78
zahle 28.35 mit Zins zurück	-1.03*28.35 = -29.20
Balance	2,80

$S(T) = 80$

Aktion	Geldfluß
verkaufe 0.4 Aktien	0.4*80 = 32
zahle 28.35 mit Zins zurück	-1.03*28.35 = -29.20
Balance	2,80

$\hookrightarrow$Investition von 0, in beiden Fällen Gewinn von 2.80,
also ARBITRAGE vorhanden

Optionspreisbestimmung durch No-Arbitrage-Prinzip

Aus dem
No-Arbitrage-Prinzip (es gibt kein Arbitrage auf den Märkten)
folgt das
Duplikationsprinzip (liefern zwei Güter die gleichen Zahlungsströme, so müssen ihre Preise zu jedem Zeitpunkt übereinstimmen).

Duplizierendes Portfolio:

$$130x + 1,03y = 20$$
$$80x + 1.03y = 0$$

Lösung: $(x, y) = (0.4, -31.07)$.

Optionspreis:
$C^{NAP}(0) \ = xS_0 + y1 = 0.4 * 100 - 31.07 = 8.93$

Duplizierendes Portfolio

(↬Duplikationsprinzip)

$S(0) = 100$

Aktion	Geldfluß
verkaufe 1 Call-Option	+8.93
leihe 31.07 Geld	+31.07
kaufe 0.4 Aktien	-40
Balance	0

$S(T) = 130$

Aktion	Geldfluß
verkaufe 1 Aktie(Option)	110
kaufe 0.6 Aktien	-0.6*130 = -78
zahle 31.07 mit Zins zurück	-1.03*31.07 = -32
Balance	0

$S(T) = 80$

Aktion	Geldfluß
verkaufe 0.4 Aktien	0.4*80 = 32
zahle 31.07 mit Zins zurück	-1.03*31.07 = -32
Balance	0

Ein-Perioden-Modell

- zwei Zeitstufen, $t = 0$ und $t = T$

- Wert der $d + 1$ Wertpapiere zum Zeitpunkt 0:
  $S(0) = (S_0, \ldots, S_d)' \in \mathbb{R}^{d+1}$

- endlicher Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, F, \mathbb{P})$, wobei $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N)$ die verschiedenen Marktzustände darstellt

- $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0 \; \forall_{\omega \in \Omega}$ – alle Zustände möglich

- möglicher Wert des i-ten Wertpapiers bei T:
  $S_i(T, \omega) = (S_i(T, \omega_1), \ldots, (S_i(T, \omega_N))$.

- Handelsstrategie
  ist ein Vektor $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_d)' \in \mathbb{R}^{d+1}$, der beschreibt wieviel von jedem Wertpapier zum Zeitpunkt 0 gekauft wird (Einträge negativ $\Rightarrow$ short position).

Ein-Perioden-Modell

- Investition bei $t = 0$:

$$S(0)'\varphi = \sum_{i=0}^{d} \varphi_i S_i(0)$$

- zufälliger Wert des Portfolios bei T (abhängig vom Zustand (state of the world) ω):

$$S(T,\omega)'\varphi = \sum_{i=0}^{d} \varphi_i S_i(T,\omega)$$

- *kurz*: $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{(d+1)\times N}$ (In der i-ten Spalte stehen die Werte der Wertpapiere bei T im Zustand ω_i)
- Wert des Portfolios bei $\omega_1, \ldots, \omega_N$: $\mathbf{S}'\varphi \in \mathbb{R}^N$

- Arbitragestrategie
  ist ein Vektor $\varphi \in \mathbb{R}^{d+1}$, so dass gilt:
  $t = 0$: $S'(0)\varphi = 0$
  $t = T$: $\forall \omega \in \Omega : S(T,\omega)'\varphi \geq 0$ und
  $\exists \omega \in \Omega : S(T,\omega)'\varphi > 0$

1 Theorem

$$Kein\ \ Arbitrage \Longleftrightarrow \exists_{\psi \in \mathbb{R}^N}, \forall_{i \in \{1,\ldots,N\}}, \psi_i > 0 : \mathbf{S}\psi = S(0)$$

ψ wir auch *state-price Vektor* genannt

KURZ:

Kein Arbitrage $\Longleftrightarrow$ *es existiert ein state-price Vektor*

Vorbereitung zum Beweis des Theorems

Geometrische Deutung von Arbitragefreiheit:
Die Räume

$$\Gamma = \{(x,y)', x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^N | x = -S(0)'\varphi, y = \mathbf{S}'\varphi, \varphi \in \mathbb{R}^{d+1}\}$$

und

$$\mathbb{R}_+^{N+1} = \{z \in \mathbb{R}^{N+1} | \forall i \in \{0,\ldots,N\} : z_i \geq 0 \exists i : z_i > 0\}$$

haben keine gemeinsamen Punkte.

Der *Hyperebenen-Trennungssatz* besagt nun:

Γ lin. Unterraum des $\mathbb{R}^{N+1}$, K kompakte konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^{N+1}$, die keine gemeinsamen Punkte mit Γ hat:

$$K \cap \Gamma = \emptyset$$

Dann lassen sich Γ und K durch eine Hyperebene trennen, welche Γ enthält, d.h.:
$\exists_{\lambda \in \mathbb{R}^N} : \forall_{x \in K} : \langle x, \lambda \rangle > 0$ und $\forall_{y \in \Gamma} : \langle y, \lambda \rangle = 0$

Risikoneutrale Wahrscheinlichkeit (RNP)

(risk-neutral probability)

Bestimmen der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit p* (Aktienkurs wird als faires Spiel betrachtet):

$$S(0) = \mathbb{E}^*(\frac{S(T)}{1+r})$$

Mit den Werten aus dem obigen Beispiel und r=0.03 gilt:

$$100 = \frac{(p^*130 + (1-p^*)80)}{1+0.03} \Rightarrow p^* = \frac{23}{50} = 0.46$$

Optionspreis bzgl. dieser Wahrscheinlichkeit:

$$C(0) = \mathbb{E}^*(\frac{C(T)}{1+r}) = \frac{20p^*}{1+r} = 8.93$$

equivalent martingale measure (EMM)

- Normalisiere ψ: $\psi_0 = \psi_1 + \cdots + \psi_N$

- Setze $q_i = \frac{\psi_i}{\psi_0}$ (Wahrscheinlichkeit, dass ω_i eintritt)

Damit gilt für das i-te Wertpapier:

$$\frac{S_i(0)}{\psi_0} = \sum_{j=1}^{N} q_j S_i(T, \omega_j) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_i(T)).$$

- S_0 sei risikolose Geldanlage (z.B. ein Bond):

$$\frac{S_0(0)}{\psi_0} = \sum_{j=1}^{N} q_j S_0(T, \omega_j) = \sum_{j=1}^{N} q_j 1 = 1$$

$\Rightarrow$ $S_0(0) = \psi_0 = (1+r)^{-T}$, wobei ψ_0 der Abzug für das Leihen von Geld sei

Damit gilt für das i-te Wertpapier bei $t = 0$:

$$S_i(0) = \sum_{j=1}^{N} q_j \frac{S_i(T,\omega_j)}{(1+r)^T} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{(S_i(T))}{(1+r)^T}\right)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{S_i(0)}{(1+r)^0} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{(S_i(T))}{(1+r)^T}\right)$$

2 Theorem

Definition:
Ein Markt heißt *vollständig*, wenn sich für jede Option ein duplizierendes Portfolio konstruieren lässt.

Unter der Annahme, dass es kein Arbitrage gibt, gilt:

$$\text{Marktmodell ist vollständig}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\exists_{\varphi \in \mathbb{R}^{d+1}} \forall_{\delta \in \mathbb{R}^N} : \mathbf{S}'\varphi = \delta \text{ ist lösbar}$$

kurz:

Marktmodell ist vollständig $\Longleftrightarrow$ *EEM ist eindeutig*

- Theorem besagt, dass die Vektoren $S_i(T)$ den ganzen $\mathbb{R}^N$ aufspannen (d.h. es gibt genau $\omega_i, i \in \{1, \ldots, N\}$ Zustände).

Zusammenhang RNP - EMM

Die Erwartungswerte bzgl. EMM ($\rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$) und RNP ($\rightarrow \mathbb{E}^*$) bestimmen beide den richtigen Optionspreis und stimmen somit überein.

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{E}^*$$

$\hookrightarrow$ Basis der Finanzmathematik

Beispiel

- $d + 1 = 2$ Wertpapiere (ein risikoloser Bond, eine Aktie)
- $|\Omega| = 2$ mögliche Zustände
- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$
- $r = 0$
- $K = 110$

$$S(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 100 \end{pmatrix},$$

$$S_0(T) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S_1(T) = \begin{pmatrix} 130 \\ 80 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 130 & 80 \end{pmatrix}$$

Beispiel (state-price Vektor)

Bestimmen des state-price Vektors, ψ, durch lösen von $S(0) = \mathbf{S}'\psi$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 130 \\ 1 & 80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

Er ist schon normalisiert:

$$\psi_1 + \psi_2 = 1 (= \psi_0)$$

Die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten sind somit:

$$\mathbb{Q}(\omega_1) = \frac{2}{5}, \quad \mathbb{Q}(\omega_2) = \frac{3}{5}$$

Beispiel (vollständigkeit des Markts)

Markt ist vollständig, d.h. es gibt nur ein EMM:

- Sei $\delta(T) = (\delta(T, \omega_1), \delta(T, \omega_2))'$ eine Option
- δ muss in der linearen Hülle von dem durch $S_1(T)$ und $S_2(T)$ aufgespannten Raum (hier $\mathbb{R}^2$) liegen
- hier ist es der Fall!

$\Rightarrow$ der Markt ist vollständig, also können wir ein duplizierendes Portfolio konstruieren.

Beispiel (duplizierendes Portfolio)

Finde duplizierendes Portfolio durch lösen von:
$\mathbf{S}'\varphi = \delta(T)$

Mit $\delta(T, \omega_1) = 20$, $\delta(T, \omega_2) = 0$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 130 \\ 1 & 80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \varphi_0 = -32$ und $\varphi_1 = 2/5$

Das heißt: $(-)32$ Geldeinheiten leihen und $2/5 = 0.4$ Aktien kaufen.

(Abgezinst mit dem Zinssatz $r = 0.03$ muss man $32/1.03 = 31.07$ Geldeinheiten leihen.)

Zwei-Perioden-Modell

- drei Zeitpunkte($t = 0, T/2, T$)
- zwei Perioden, in denen sich Zustände ändern können

IDEE:

Betrachte jeden Zeitschritt als ein Ein-Perioden-Modell und arbeite dich von hinten nach vorne durch das ↬ Baumdiagramm.