Übersicht

- Wiederholung Maßtheorie
- Wiederholung Wahrscheinlichkeitstheorie
- Filtrierungen von Sigma-Algebren
- Stochastische Prozesse

Wiederholung Maßtheorie

Definition: Algebra

Sei Ω eine Menge, und sei $\mathcal{A}$ ein System von Teilmengen von Ω mit den Eigenschaften

(a) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(b) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$,

(c) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Dann heisst $\mathcal{A}$ eine **Algebra** auf Ω.

Definition: σ-Algebra

Sei Ω eine Menge und $\mathcal{A}$ eine Algebra auf Ω, so dass gilt

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A},$$

dann nennt man $\mathcal{A}$ eine σ-**Algebra**.

Definition: Messbarer Raum

Sei Ω eine Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω, dann nennt man das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ einen **messbaren Raum**.

Definition: Messbare Funktionen

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega^{'}, \mathcal{A}^{'})$ zwei messbare Räume. Eine Funktion $f : \Omega \to \Omega^{'}$ heißt **messbar**, falls für alle $A^{'} \in \mathcal{A}^{'}$ gilt, daß

$$f^{-1}[A^{'}] = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A^{'}\} \in \mathcal{A}.$$

Eigenschaften von Mengenfunktionen

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine nicht-negative Funktion, so daß $\mu(\emptyset) = 0$. μ heißt

- **endlich additiv**, falls für alle disjunkten Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ gilt, daß

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B),$$

- σ-**additiv** (oder **Prämaß**), falls für alle Folgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ disjunkter Mengen in $\mathcal{A}$ mit $\bigcup A_n \in \mathcal{A}$ gilt, daß

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Definition: Maß

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Eine σ-additive Funktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heisst **Maß** auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

Definition: Maßraum

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, dann nennt man das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ einen **Maßraum**.

Wiederholung
Wahrscheinlichkeitstheorie

Definition:

Wahrscheinlichkeitsmaß

Ein Maß P auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ heisst **Wahrscheinlichkeitsmaß**, falls

$$P(\Omega) = 1.$$

Definition:

Wahrscheinlichkeitsraum

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$,
dann nennt man das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ einen **Wahrscheinlichkeitsraum**.

Definition: Ereignis

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, dann nennt man ein Element $A \in \mathcal{A}$ **Ereignis**.

Definition: unabhängige Ereignisse

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$ heißen **unabhängig**, falls

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Definition: bedingte Wahrscheinlichkeit

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sind A, B zwei Ereignisse mit $P(B) > 0$, so bezeichnet man mit

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von A unter Voraussetzung von B.

Definition: Zufallsvariable

Sei Ω eine endliche oder abzählbare Menge, und (Ω, P) der dazugehörige diskrete Wahrscheinlichkeitsraum, dann nennt man eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine **(diskrete) Zufallsvariable**.

Definition: Verteilungsfunktion

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, dann nennt man für alle $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) := P(\{\omega : X(\omega) \leq x\})$$

die **Verteilungsfunktion** von X.

Definition: Erzeugte σ-Algebra

Die kleinste σ-Algebra, die für alle $x \in \mathbb{R}$ die Mengen $\{\omega : X(\omega) \leq x\}$ enthält, nennt man die von X **erzeugte σ-Algebra**; kurz: $\sigma(X)$.

Definition: Erwartungswert

Wenn $\sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| \cdot P(\omega)$ konvergiert,
heißt $E(X) := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega)$ der
Erwartungswert von X.

Definition: Varianz

Die **Varianz** einer reellen Zufallsvariablen X ist definiert als

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Definition: Unabhängige Zufallsvariablen

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen auf Ω. Die Familie $(X_i)_{i=1}^n$ heißt **unabhängig**, falls für alle $A_i \in \mathcal{B}$ gilt, daß

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{\omega : X_i(\omega) \in A_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(\{\omega : X_i(\omega) \in A_i\}).$$

Filtrierungen

Diskreter Zeitverlauf

diskrete Zeitschritte $t = 0, 1, 2, \ldots$

- Startzeitpunkt: $t = 0$
- Endzeitpunkt (falls er existiert): $t = T$

σ-Algebren und Information

- Annahme: Information soll nicht verloren gehen

- mit fortlaufender Zeit somit immer mehr Information

- σ-Algebren repräsentieren Information

- Folge von σ-Algebren $\{\mathcal{F}_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ mit $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

- $\mathcal{F}_n$ repräsentiert Informationsstand zum Zeitpunkt n

- $\mathcal{F}_0 \mathrel{\hat{=}}$ "Startinformation"
  (falls es keine gibt: $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$)

- $\mathcal{F}_\infty := \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n = \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n\right)$
  $\mathrel{\hat{=}}$ "alles, was wir jemals wissen werden"
  (**Doomsday σ-Algebra**)

Definition: Filtrierung

Eine Familie $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ von σ-Algebren mit $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ heißt **Filtrierung**.

Definition: Filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum

Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ zusammen mit einer Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ heißt **stochastische Basis** oder **filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum** $(\Omega, \mathbb{F}, \mathcal{A}, P)$.

Filtrierungen für endliches Ω

- $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$

- $M_1, M_2, \ldots, M_n$ seien die inklusionsminimalen nichtleeren Mengen in $\mathcal{A}$

- $M_1, M_2, \ldots, M_n$ paarweise disjunkt und überdecken ganz Ω $\Rightarrow$ bilden die von $\mathcal{A}$ **induzierte Partition** $P_1 = (M_1, M_2, \ldots, M_n)$ von Ω

- $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$
  $\Rightarrow$ die von $\mathcal{A}'$ induzierte Partition
  $P_2 = (M'_1, M'_2, \ldots, M'_m)$ vergröbert die Partition P_1

- Filtrierung $\mathbb{F} \mathrel{\widehat{=}}$ Folge von immer feiner werdenden Partitionen P_n

Stochastische Prozesse

Definition: Stochastischer Prozess

Ein **stochastischer Prozess** $X = \{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ ist eine Familie von Zufallsvariablen, die auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum operieren.

Definition: Adaptierte Prozesse

Der stochastische Prozess $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ heißt **adaptiert** zur Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$, falls X_n für alle n $\mathcal{F}_n$-messbar ist.

Definition: Natürliche Filtrierung

Ist $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$, so nennt man $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)$ die **natürliche Filtrierung** von $X = (X_n)$.

Zusammenhang von zwei Prozessen

Hat man die natürliche Filtrierung $\mathcal{F}_n = \sigma(W_0, W_1, \ldots, W_n)$ eines Prozesses $W = (W_n)$ gegeben, so gilt:

Der Prozess $X = (X_n)$ ist adaptiert zur Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)$.
$\Longleftrightarrow$ Es existiert eine messbare Funktion f_n auf n+1 Variablen mit $X_n = f_n(W_0, W_1, \ldots, W_n)$.

Markov-Prozesse und Martingale

- zwei Haupttypen von stochastischen Prozessen: **Markov-Prozesse** und **Martingale**

- Markov-Prozesse: nur der momentane Zustand bestimmt über den weiteren Verlauf des Prozesses

- Martingale: jeder vorherige Zustand bestimmt über den weiteren Verlauf des Prozesses

Das Wertpapiermarkt-Modell enthält

- einen endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $|\Omega| < \infty$ und $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$,

- die (diskreten) Anlagezeitpunkte $t = 1, ..., T$,

- den Finanzmarkt mit $d+1$ Wertpapieren,

- die Preisentwicklung S mit $S(t) = (S_o(t), S_1(t), ..., S_d(t))'$, wobei die Preise der Wertpapiere zu einem bestimmten Zeitpunkt nicht-negative, F_t-meßbare Zufallsvariablen $S_i(t, \omega), i \in \{0, 1, ..., d\}$ sind und

- die Informationsstruktur $\mathbb{F} = \{F_t\}_{t=0}^{T}$ mit $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $F_T = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, die meist von der Preisentwicklung generiert wird.

Die Informationsstruktur ist eine Filtrierung!!

Die Annahme, daß die Preisentwicklung mindestens eines Wertpapieres streng positiv ist, wird sich als essentiell herausstellen.

Nun zur Entwicklung des Modells:

0 min

Definition 12:

Eine Preisentwicklung $(X(t))_{t=0}^{T}$, die für alle $t \in \{0, 1, ..., T\}$ streng positiv ist, heißt **Numéraire**.

Also ist ein Numéraire was wünschenswertes! Ein Standardansatz ist das risikofreie Bankkonto als Numéraire. Im weiteren wird der Begriff jedoch ohne weitere Spezifikation verwendet. Wir versehen ein Numéraire aus der Menge der $d+1$ Wertpapiere mit dem Label 0 und setzen $S_0(0) = 1$.

0 min

Definition 13:

$\beta(t) := \frac{1}{S_0(t)}$ heißt der **Diskont-Faktor**.

Und jetzt: Normierung auf das Startkapital des Numéraires!

(Also ist $S_0(t) > 0$, aber die Preisentwicklung des Numéraires soll ja auch streng positiv sein!)

$\boxed{0 \text{ min}}$

Definition 14:

Eine **Anlagestrategie** (oder ein **dynamischer Wertpapierbestand**) φ ist ein vektorwertiger stochastischer Prozeß

$$\begin{aligned}\varphi &= (\varphi(t))_{t=0}^{T} \\ &= ((\varphi_0(t,\omega), \varphi_1(t,\omega), ..., \varphi_d(t,\omega))')_{t=0}^{T} \ \in \mathbb{R}^{d+1},\end{aligned}$$

der vorhersagbar (oder vorhersehbar) ist:
Jedes $\varphi_i(t)$ ist F_{t-1}-meßbar für $t \geq 1$.

$\varphi_i(t)$ bezeichnet die Anzahl der Wertpapiere mit Label i im Wertpapierbestand zur Zeit t - festgelegt aufgrund der **vor** dem Zeitpunkt t verfügbaren Information.
Die Komponenten $\varphi_i(t)$ können sowohl positive als auch negative Werte annehmen (kurzfristige Verkäufe möglich, Annahme, daß die Wertpapiere perfekt teilbar sind).

Zur Erinnerung: Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega^{'}, \mathcal{A}^{'})$ zwei messbare Räume. Eine Funktion $f : \Omega \to \Omega^{'}$ heißt **messbar**, falls für alle $A^{'} \in \mathcal{A}^{'}$ gilt, daß

$$f^{-1}[A^{'}] = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A^{'}\} \in \mathcal{A}.$$

0 min

Definition 15:

Der **Wert** eines Wertpapierbestandes zum Zeitpunkt t ist das Skalarprodukt

$$V_\varphi(t) = \varphi(t) \cdot S(t)$$
$$:= \sum_{i=0}^{d} \varphi_i(t) S_i(t), \quad t = 1, 2, ..., T$$

und

$$V_\varphi(0) = \varphi(0) \cdot S(0) \; mit \; \varphi(0) := \varphi(1)$$

Die Entwicklung $V_\varphi(t, \omega)$ nennt man die **Wertentwicklung** der Anlagestrategie φ.

Der Startwert $V_\varphi(0)$ wird **Initialinvestition** des Investors genannt. Die Veränderung des Marktwertes zwischen den Zeitpunkten $t-1$ und t ist

$$\varphi(t) \cdot (S(t) - S(t-1)) = \varphi(t) \cdot \Delta S(t).$$

$\varphi(t)S(t-1)$ ist der Wert nach Kauf zum Zeitpunkt $t-1$ und $\varphi(t)S(t))$ ist der Wert zum Zeitpunkt t nach Preisfestlegung und vor daraus folgender Veränderung des Wertpapierbestandes.

0 min

Definition 16: Gewinnentwicklung

Die **Gewinnentwicklung** G_φ einer Anlagestrategie ist gegeben durch

$$\begin{aligned} G_\varphi(t) &= \sum_{\tau=1}^{t} \varphi(\tau) \cdot (S(\tau) - S(\tau - 1)) \\ &= \sum_{\tau=1}^{t} \varphi(\tau) \cdot \Delta S(\tau) \end{aligned}$$

$$t = 1, 2, ..., T$$

Also ist die Gewinnentwicklung die Summe der Veränderungen des Marktwertes!

0 min

Definition 17:

Sei $\widetilde{S}(t) = (1, \beta(t)S_1(t), ..., \beta(t)S_d(t))'$ der Vektor der **diskontierten** Preise, dann ist die **diskontierte Wertentwicklung**

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_\varphi(t) &= \beta(t) \cdot (\varphi(t) \cdot S(t)) \\ &= \varphi(t) \cdot \widetilde{S}(t),\end{aligned}$$

und die **diskontierte Gewinnentwicklung**

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_\varphi(t) &:= \sum_{\tau=1}^{t} \varphi(\tau) \cdot (\widetilde{S}(\tau) - \widetilde{S}(\tau - 1)) \\ &= \sum_{\tau=1}^{t} \varphi(\tau) \cdot \Delta\widetilde{S}(\tau)\end{aligned}$$

$t = 1, 2, ...T.$

Definition 18:

Eine Strategie φ ist **selbst-finanzierend**, $\varphi \in \Phi$, wenn gilt:

$$\varphi(t) \cdot S(t) = \varphi(t+1) \cdot S(t)$$

t=1,2,...,T

DAS IST NICHT DIE GEWINNENTWICKLUNG!!!!

Interpretation: Nach Festlegung der neuen Preise zum Zeitpunkt t ändert der Investor seinen Wertpapierbestand
von $\varphi(t)$ zu $\varphi(t+1)$,
ohne einen Kredit aufzunehmen oder Geld abzuziehen.

0 min

Proposition 1
(Invarianz des Numéraires):

Sei $X(t)$ ein Numéraire. Eine Anlagestrategie φ ist genau dann selbst-finanzierend bezüglich $S(t)$, wenn φ selbst-finanzierend bezüglich $X(t)^{-1} \cdot S(t)$ ist.

Beweis:

$X(t)$ ist streng positiv für alle $t \in \{0, 1, ..., T\}$.
Also gilt:

$$\varphi(t) \cdot S(t) = \varphi(t+1) \cdot S(t)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\varphi(t) \cdot X(t)^{-1} \cdot S(t) = \varphi(t+1) \cdot X(t)^{-1} \cdot S(t)$$

$\boxed{0 \text{ min}}$

Corollar 1:

Eine Anlagestrategie φ ist genau dann selbstfinanzierend bezüglich $S(t)$, wenn sie selbstfinanzierend bezüglich $\widetilde{S}(t)$ ist.

siehe Proposition 1 (Sonderfall)

0 min

Proposition 2:

Eine Anlagestrategie φ ist genau dann selbstfinanzierend, wenn gilt:

$$\widetilde{V}_\varphi(t) = V_\varphi(0) + \widetilde{G}_\varphi(t) \qquad t = 0, 1, ..., T$$

In Worten: Wenn die diskontierte Wertentwicklung gleich der Summe aus Initialiinvestition und diskontierter Gewinnentwicklung ist!!!

Beweis:

Sei $\varphi \in \Phi$. Es gilt:
$V_\varphi(0) + \widetilde{G}_\varphi(t)$
$= \varphi(0) \cdot S(0) + \sum_{\tau=1}^{t} \varphi(\tau) \cdot (\widetilde{S}(\tau) - \widetilde{S}(\tau - 1))$
Wegen

$$\begin{aligned}
\varphi(0) \cdot S(0) &= \varphi(1) \cdot S(0) \\
&= \varphi(1) \cdot \frac{1}{\beta(0)} \cdot \widetilde{S}(0) \\
&= \varphi(1) \cdot S_0(0) \cdot \widetilde{S}(0) \\
&= \varphi(1) \cdot \widetilde{S}(0)
\end{aligned}$$

0 min

und

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\tau=1}^{t} \varphi(\tau) \cdot (\widetilde{S}(\tau) - \widetilde{S}(\tau-1)) \\
= &\sum_{\tau=1}^{t} \varphi(\tau) \cdot \widetilde{S}(\tau) - \sum_{\tau=1}^{t} \varphi(\tau) \cdot \widetilde{S}(\tau-1) \\
= &\sum_{\tau=1}^{t-1} \varphi(\tau) \cdot \widetilde{S}(\tau) + \varphi(\tau) \cdot \widetilde{S}(\tau) \\
&- \sum_{\tau=1}^{t-1} \varphi(\tau+1) \cdot \widetilde{S}(\tau) - \varphi(1) \cdot \widetilde{S}(0) \\
= &\sum_{\tau=1}^{t-1} (\varphi(\tau) - \varphi(\tau+1)) \cdot \widetilde{S}(\tau) \\
&+ \varphi(t) \cdot \widetilde{S}(t) - \varphi(1) \cdot \widetilde{S}(0)
\end{aligned}
$$

Es gilt damit:

$$
\begin{aligned}
&V_\varphi(0) + \widetilde{G}_\varphi(t) \\
= \varphi(1) \cdot \widetilde{S}(0) &- \sum_{\tau=1}^{t-1} (\varphi(\tau) - \varphi(\tau+1)) \cdot \widetilde{S}(\tau) \\
&+ \varphi(t) \cdot \widetilde{S}(t) - \varphi(1) \cdot \widetilde{S}(0) \\
&= \varphi(t) \cdot \widetilde{S}(t) \\
&= \widetilde{V}_\varphi(t)
\end{aligned}
$$

Nehmen wir nun an, daß gilt:

$$\widetilde{V}_\varphi(t) = V_\varphi(0) + \widetilde{G}_\varphi(t), \quad t = 0, 1, ..., T.$$

Es reicht zu zeigen, daß gilt:

$$\varphi(t)\widetilde{S}(t) = \varphi(t+1)\widetilde{S}(t).$$

Beweis per Induktion:
Induktionsanker: Für $i = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}_\varphi(1) &= \varphi(1)\widetilde{S}(1) \\
&= V_\varphi(0) + \widetilde{G}_\varphi(t) \\
&= \varphi 0 S(0) + \varphi(1)(\widetilde{S}(1) - \widetilde{S}(0)) \\
&\Longleftrightarrow \\
\varphi(0)S(0) &= \varphi(1)\widetilde{S}(0)
\end{aligned}$$

Induktionsschluß:

mit Teleskopsumme!!! (Reicht als Erklärung!)
Angenommen, für ein $i \in \mathbb{N}$ gilt

$$\varphi(i-1)\widetilde{S}(i-1) = \varphi(i)\widetilde{S}(i-1).$$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{V}_\varphi(i+1) &= \varphi(i+1)\widetilde{S}(i+1) \\
&= V_\varphi(0) + \widetilde{G}_\varphi(i-1) \\
&= \varphi(0)S(0) + \sum_{\tau=1}^{i+1} \varphi(\tau)(\widetilde{S}(\tau) - \widetilde{S}(\tau-1)) \\
&= \varphi(0)\widetilde{S}(0) + \sum_{\tau=1}^{i+1} \varphi(\tau)\widetilde{S}(\tau) \\
&- \sum_{\tau=1}^{i+1} \varphi(\tau)\widetilde{S}(\tau-1) \\
&= \varphi(0)\widetilde{S}(0) + \sum_{\tau=2}^{i+2} \varphi(\tau-1)\widetilde{S}(\tau-1) \\
&- \sum_{\tau=1}^{i+1} \varphi(\tau)\widetilde{S}(\tau-1) \\
&= \varphi(0)\widetilde{S}(0) + \varphi(i)\widetilde{S}(i) \\
&+ \varphi(i+1)\widetilde{S}(i+1) - \varphi(1)\widetilde{S}(0) \\
&- \varphi(i+1)\widetilde{S}(i) \\
&\Longleftrightarrow \\
\varphi(i)\widetilde{S}(i) &= \varphi(i+1)\widetilde{S}(i)
\end{aligned}
$$

Es ist erlaubt, Kredite aufzunehmen (also kann $\varphi_0(t)$ negativ sein) und kurzfristig zu verkaufen (also kann $\varphi_i(t)$ negativ werden für $i = 1, ..., d$).

Proposition 3:

Wenn $(\varphi_1(t), ..., \varphi_d(t))'$ vorhersagbar und $V_\varphi(0)$ F_0-meßbar ist, gibt es eine eindeutige vorhersagbare Entwicklung $(\varphi_0(t))_{t=1}^T$, so daß $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_d)'$ selbst-finanzierend mit dem Initialwert $V_\varphi(0) = V_0$ des zugehörigen Wertpapierbestandes ist.

Wenn φ selbst-finanzierend ist, gilt:
vorhergehende Proposition!

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_\varphi(t) &= V_0 + \widetilde{G}_\varphi(t) \\ &= V_0 + \sum_{\tau=1}^{t} (\varphi_1(\tau) \cdot \Delta S_1(\tau) + ... \\ &+ \varphi_d(\tau) \cdot \Delta S_d(\tau)).\end{aligned}$$

Also gilt

$$\widetilde{V}_\varphi(0) = V_0 \Longrightarrow V_\varphi(0) = V_0.$$

(weil $S_0(0) = 1$)
Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_\varphi(t) &= \varphi(t)\widetilde{S}(t) \\ &= \varphi_0(t) + \varphi_1(t)\widetilde{S}_1(t) + ... + \varphi_d(t)\widetilde{S}_d(t).\end{aligned}$$

Gleichsetzen ergibt:
$V_0 + \sum_{\tau=1}^{t}(\varphi_1(\tau \cdot \Delta\widetilde{S}_1(\tau) + ... + \varphi_d(\tau) \cdot \Delta\widetilde{S}_d(\tau))$
$= \varphi_0(t) + \varphi_1(t)\widetilde{S}_1(t) + ... + \varphi_d(t)\widetilde{S}_d(t)$

$$\Leftrightarrow$$

$\varphi_0(t) = V_0 + \sum_{\tau=1}^{t}(\varphi_1(\tau) \cdot \Delta\widetilde{S}_1(\tau) + ...$
$+\varphi_d(\tau) \cdot \Delta\widetilde{S}_d(\tau)) - (\varphi_1(t)\widetilde{S}_1(t) + ... + \varphi_d(t)\widetilde{S}_d(t))$
$\boxed{0 \text{ min}}$

Damit ist $\varphi_0(t)$ eindeutig definiert.

$$\varphi_i(t) \cdot \Delta \widetilde{S}_i(t) - \varphi_i(t)\widetilde{S}_i(t) = -\varphi_i(t)\widetilde{S}_i(t)$$

ist F_{t-1}-meßbar, also gilt:
weil φ und $S_i F_{t-1}$-meßbar (vorhersagbar) ist.

$\varphi_0(t) = V_0 + \sum_{\tau=1}^{t-1}(\varphi_1(\tau) \cdot \Delta \widetilde{S}_1(\tau) + ...$
$+\varphi_d(\tau) \cdot \Delta \widetilde{S}_d(\tau)) - (\varphi_1(t)\widetilde{S}_1(t-1) + ...$
$+\varphi_d(t)\widetilde{S}_d(t-1))$,
wobei $\varphi_1, ..., \varphi_d$ vorhersagbar sind (Voraussetzung!!!). Damit sind alle Terme der rechten Seite F_{t-1}-meßbar. Also ist φ_0 vorhersagbar.

Definition 19:

Sei $\widetilde{\Phi} \subset \Phi$ eine Menge von selbst-finanzierenden Strategien. Eine Strategie $\varphi \in \widetilde{\Phi}$ heißt **Arbitrage-Möglichkeit** oder **Arbitrage-Strategie** in Bezug auf $\widetilde{\Phi}$, wenn

$$\mathbb{P}\{V_\varphi(0) = 0\} = 1$$

und für den Endwert von φ gilt:

$$\mathbb{P}\{V_\varphi(T) \geq 0\} = 1 \quad \textbf{und} \quad \mathbb{P}\{V_\varphi(T) > 0\} > 0.$$

Also ist eine Arbitrage-Möglichkeit eine selbstfinanzierende Strategie mit Anfangswert 0, die mit Wahrscheinlichkeit 1 einen nicht-negativen Endwert und mit einer Wahrscheinlichkeit echt größer 0 einen echt positiven Endwert (d.h. einen Gewinn) hat.

Arbitrage-Möglichkeiten werden immer in Bezug auf eine bestimmte Klasse von Anlagestrategien definiert!!!

0 min

Definition 20:

Ein Wertpapiermarkt $\mathcal{F}$ ist Arbitrage-frei, wenn es keine Arbitrage-Möglichkeiten in der Klasse $\widetilde{\Phi}$ von Strategien gibt.

Nur ein Vorgriff auf folgende Vorträge!!!

0 min