Notation

$S(t)$ Preis angegeben zur Zeit t

$S(t,\omega)$ eine Realisierung des Preisprozesses

$\omega \in \Omega$ zufälliges Ereignis

ω kann durch die Filtrierung $\mathcal{F}_t$ beschrieben werden. $\mathcal{F}_t$ heißt, wie viele Informationen wir haben zum Zeitpunkt t

$$\beta(t) = \frac{1}{S_0(t)}$$ Diskont-Faktor

$$\tilde{S}(t) = (1, \beta(t)\cdot S_1(t), \dots, \beta(t)\cdot S_d(t))'$$

der Vektor der diskontierten Preise

$$\tilde{V}_\varphi(t) = \beta(t)\cdot(\varphi(t)\cdot S(t))$$
$$= \varphi(t)\cdot \tilde{S}(t) \qquad \text{für } t = 1, 2, \dots, T$$

$\tilde{V}_\varphi(t)$ heißt die diskontierte Wertentwicklung (discounted value process) der Anlagestrategie φ

Lemma

Enthält das Marktmodell keine Arbitragemöglichkeiten, dann gilt für alle $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$ und alle selbstfinanzierten Anlagestrategien $\varphi \in \Phi$ und für jedes $A \in P_t$:

- $\mathbb{P}(\tilde{V}_\varphi(t+1) - \tilde{V}_\varphi(t) \geq 0 \mid A) = 1$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\tilde{V}_\varphi(t+1) - \tilde{V}_\varphi(t) = 0 \mid A) = 1$

- $\mathbb{P}(\tilde{V}_\varphi(t+1) - \tilde{V}_\varphi(t) \leq 0 \mid A) = 1$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\tilde{V}_\varphi(t+1) - \tilde{V}_\varphi(t) = 0 \mid A) = 1$

d.h. "NO ARBITRAGE 'GLOBALLY' IMPLIES NO ARBITRAGE 'LOCALLY'".

Wiederholung der Begriffe

- Sei $\tilde{\Phi} \subset \Phi$ eine Menge von selbstfinanzierten Strategien. Eine Strategie $\varphi \in \tilde{\Phi}$ wird <u>Arbitragemöglichkeit</u> oder <u>Arbitragestrategie</u> bzgl. $\tilde{\Phi}$ genannt, wenn $\mathbb{P}\{V_\varphi(0)=0\}=1$ und für den Endwert von φ gilt:

  $$\mathbb{P}\{V_\varphi(T) \geq 0\} = 1 \text{ und } \mathbb{P}\{V_\varphi(T) > 0\} > 0$$

- Man sagt ein Finanzmarkt M ist <u>arbitragefrei</u>, wenn es keine Arbitragemöglichkeiten in der Klasse Φ der Anlagestrategien gibt.

- Eine Strategie φ ist <u>selbst-finanzierend</u>, $\varphi \in \Phi$. wenn gilt:

  $$\varphi(t) \cdot S(t) = \varphi(t+1) \cdot S(t) \quad , \quad t = 1, 2, \dots, T$$

  d.h. $$\Delta V_\varphi(t) = \varphi(t) \cdot S(t) - \varphi(t-1) \cdot S(t-1)$$
  $$= \varphi(t) \cdot S(t) - \varphi(t) \cdot S(t-1)$$
  $$= \varphi(t) \cdot \Delta S(t)$$

$t \in \{0, \cdots, T-1\}$. $\varphi \in \Phi$. Sei $\mathbb{P}(\tilde{V}_\varphi(t+1) - \tilde{V}_\varphi(t) \geq 0 \mid A) = 1$ für gewissen $A \in P_t$. und definiere eine neue Anlagestrategie ψ. für alle $s = 1, 2, \cdots, T$. mit $\psi(0) = 0$

für $\omega \notin A$, sei $\psi(s, \omega) = 0$ für alle $s = 1, 2, \cdots, T$

für $\omega \in A$, sei $\psi(s, \omega) = 0$ wenn $0 < s < t$,

und zum Zeitpunkt t.

Sei $\psi(t, \omega) = \begin{pmatrix} \varphi_0(t, \omega) - \tilde{V}_\varphi(t-1, \omega) \\ \varphi_1(t, \omega) \\ \vdots \\ \varphi_d(t, \omega) \end{pmatrix}$

und für alle $s > t$

sei $\psi(s, \omega) = \begin{pmatrix} \tilde{V}_\psi(t, \omega) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$?

Bedingte Erwartungswerte

Für eine Unter-σ-Algebra $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ soll die bedingte Erwartung "messen" wieviel man über $E(X)$ weiß, wenn man X nur bzgl. $\mathcal{F}'$ "kennt." X ist eine Zufallsvariable bzgl. $\mathcal{F}$

Also, die bedingte Erwartung Z soll die folgende Eigenschaft erfüllen:

$$\sum_{\omega \in F} X(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in F} Z(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega) \quad \text{für alle } F \in \mathcal{F}'$$

Definition: Für $\omega \in \Omega$ sei $F_\omega = \bigcap \{ F \in \mathcal{F}' : \omega \in F \} \in \mathcal{F}'$.

Definiere die Abbildung $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}') : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}')(\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(F_\omega)} \cdot \sum_{\tau \in F_\omega} X(\tau)\, \mathbb{P}(\tau) = \sum_{\tau \in F_\omega} X(\tau) \frac{\mathbb{P}(\tau)}{\mathbb{P}(F_\omega)}$$

falls $\mathbb{P}(F_\omega) > 0$ und $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}')(\omega) = X(\tau)$ für ein beliebiges $\tau \in F_\omega$ (unabhängig von X) anderenfalls. Für jedes $\omega \in \Omega$ ist F_ω die Menge in der induzierten Partition von $\mathcal{F}'$, welche ω enthält.

Lemma: $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}')$ ist eine Zufallsvariable bzgl. $\mathcal{F}'$