Die bedingte Erwartung Z soll eine Zufallsvariable bzgl. $\mathcal{F}'$(statt $\mathcal{F}$) sein und auf Mengen von $\mathcal{F}'$ die gleiche Information wie $\mathbb{E}(X)$ besitzt. Also soll Z folgende Eigenschaft erfüllen:

$$\sum_{\omega \in F} X(\omega)\mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in F} Z(\omega)\mathbb{P}(\omega) \qquad \text{für alle F} \in \mathcal{F}' \qquad (*)$$

Definition 2.1.1

Für $\omega \in \Omega$ sei $F_\omega = \bigcap\{F \in \mathcal{F}' : \omega \in F\} \in \mathcal{F}'$. Definiere die Abbildung $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}') : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(F_\omega)} \sum_{\tau \in F_\omega} X(\tau)\mathbb{P}(\tau) = \sum_{\tau \in F_\omega} X(\tau)\frac{\mathbb{P}(\tau)}{\mathbb{P}(F_\omega)},$$

falls $\mathbb{P}(F_\omega) > 0$ und $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(\omega) = X(\tau)$ für ein beliebiges $\tau \in F_\omega$ (unabhängig von X) anderenfalls. Für jedes $\omega \in \Omega$ ist F_ω die Menge in der induzierten Partition von $\mathcal{F}'$, welche ω enthält.

Lemma 2.1.2

$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')$ ist eine Zufallsvariable bzgl. $\mathcal{F}'$.

Proposition 2.1.3

Eine Zufallsvariable Z bzgl. $\mathcal{F}'$ erfüllt Eigenschaft

$$\sum_{\omega \in F} X(\omega)\mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in F} Z(\omega)\mathbb{P}(\omega) \qquad (*)$$

genau dann, wenn $Z(\omega) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ mit $\mathbb{P}(F_\omega) > 0$.

1. $\mathcal{F}' = \{\emptyset, \Omega\}$, d.h. "wir wissen Nichts". Dann gilt:
   $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(\omega) = \mathbb{E}(X)$ für alle $\omega \in \Omega$.

2. $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$, d.h. "wir wissen Alles". Dann gilt:
   $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(\omega) = X(\omega)$.

3. Falls X bzgl. $\mathcal{F}'$ eine Zufallsvariable ist, dann ist X konstant auf F_ω. Damit gilt:
   $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(\omega) = X(\omega)$.

4. Wenn wieder X bzgl. $\mathcal{F}'$ eine Zufallsvariable ist, dann gilt:
   $\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{F}')(\omega) = X\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}')(\omega)$,
   wo Y eine Zufallsvariable (bzgl. $\mathcal{F}$) ist.

5. Es gilt:
   $\mathbb{E}(X + Y \mid \mathcal{F}')(\omega) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')(\omega) + \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}')(\omega)$.

6. Sei $\mathcal{F}'' \subseteq \mathcal{F}'$ eine $\sigma - Unteralgebra$. Dann gilt: $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}') \mid \mathcal{F}'')(\omega) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}'')(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ mit $\mathbb{P}(F_\omega) > 0$.

7. Mit den Voraussetzungen von 6. gilt: $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}'') \mid \mathcal{F}')(\omega) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}'')(\omega)$

8. Es gilt: $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}')) = \mathbb{E}(X)$

Die Eigenschaften 6. und 7. werden auch *Tower-Property* genannt.

Definition 3.1.1

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum zusammen mit einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Ein Prozess $X = X_n$ heisst ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)$,wenn

1. X ist adaptiert.
2. $\mathbb{E}[X_n] < \infty$ für alle n.
3. $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}$ f.s.

X heisst ein Supermartingal (bzw. ein Submartingal), wenn 1. und 2. gilt und 3. mit "$\leq$" (bzw."$\geq$") statt "$=$".

Bemerkung 3.1.2

- X ist ein Supermartingal (Submartingal), wenn -X ein Submartingal (Supermartingal) ist. X ist ein Martingal, wenn X ein Submartingal und ein Supermartingal ist.

- (X_n) ist ein Martingal, wenn $(X_n - X_0)$ ein Martingal ist.