Plan.

- Wiederholung: Martingal
- Martingal Transformation Lemma
- Äquivalenter Martingalmaß
- Existenz von Martingalmaß
- $\Rightarrow$arbitragefrei Markt

Wiederholung:

Ein **F**-adaptierter Prozess $\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{S}_n)_{n\in T}$ heißt ein <u>(**F**, $\boldsymbol{P}$)-Martingal</u>
wenn $E(|\boldsymbol{S}_n|) < \infty$ und $E(\boldsymbol{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n)=\boldsymbol{S}_n$

<u>Bedingte Erwartung</u>: Für $\omega \in \Omega$ sei

$\omega = \cap \{\mathcal{F} \in \mathbf{F} : \omega \in \mathcal{F}\} \in \mathbf{F}$, dann

$$E(X|\mathcal{F})(\omega) = \frac{\sum\limits_{\tau\in\mathcal{F}_t} X(\omega)P(\omega)}{P(\mathcal{F}_t)}$$

Wir wollen zeigen „**No-Arbitrage Theorem**“:
Existiert ein äquivalenter Martingalmaß $\boldsymbol{P}^*$
mit Preisprozess $\boldsymbol{S}\Rightarrow$Markt ist arbitragefrei

$$C_n \Delta X_n = C_n(X_n - X_{n-1})$$

Gesamter Gewinn bis zum Zeitpunkt n:

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} C_n \Delta X_n = \sum_{k=1}^{n} C_n(X_n - X_{n-1})$$

Notation:

$$Y = C \bullet X,$$

$$Y_n = (C \bullet X)_n,$$

$$\Delta Y_n = C_n \Delta X_n$$

Satz 1

i) Wenn C ein beschränkter positiver vorhersehbarer Prozess und X ein Supermartingal ist, dann ist $C \bullet X$ auch ein Supermartingal.

ii) Ist C beschränkt und vorhersehbar, und X ein Martingal, dann ist auch $C \bullet X$ ein Martingal.

Martingal Transformation Lemma

Adaptierte Folge von Zufallsvariablen (M_n) ist ein Martingal, g.d.w. für jedes beschränkte vorhersehbare (H_n) gilt:

$$E(\sum_{n=1}^{T} H_n \Delta M_n) = 0$$

Definition.
Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\boldsymbol{P}^*(\{\omega\}) > 0$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$, das zu $\boldsymbol{P}$ äquivalent ist, heißt $\underline{Martingalmaß}$ für Prozess $\boldsymbol{S}$, bezüglich der Filtration **F**, wenn $\boldsymbol{S}$ ein Martingal ist.
$\mathcal{P}(S)$ - Klasse von äquivalenten Martingalmaßen.

Satz 2
Wenn $\boldsymbol{P}^* \in \mathcal{P}(S)$ ein äquivalentes Martingalmaß ist und $\phi \in \Phi$ eine selbstfinanzierende Strategie, dann ist der Vermögensprozess $\widetilde{V}_\phi(t)$ ist ein $\boldsymbol{P}^*$ Martingal bezüglich **F**.

Satz 3
(eine Richtung von **No-Arbitrage Theorem**)

Wenn ein äquivalentes Martingalmaß existiert, also $\mathcal{P}(S) \neq \emptyset$, dann ist der Markt arbitragefrei.