Das No-Arbitrage Theorem

Teil 1

Jürgen Schütz

4. Juni 2004

Das No-Arbitrage Theorem

Satz. *(No-Arbitrage Theorem) Ein Markt $\mathcal{M}$ ist genau dann arbitragefrei, wenn es ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ gibt, so dass die diskontierte Preisentwicklung $\tilde{S}$ ein $\mathbb{P}^*$-Martingal ist.*

Eine Richtung des Satzes wurde schon bewiesen. Es bleibt noch, folgende Proposition zu zeigen.

Proposition. *Ist der Markt $\mathcal{M}$ arbitragefrei, dann gibt es ein äquivalentes Martingalmaß.*

Beweisskizze

- Aus der globalen Arbitragefreiheit folgt die lokale Arbitragefreiheit.

- Mit den Ergebnissen über arbitragefreie Märkte im Ein-Perioden-Modell folgt die Existenz äquivalenter Martingalmaße für alle lokalen Märkte.

- Mit Hilfe dieser Maße definieren wir eine Abbildung

$$\mathbb{P}^* : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1] \ \ldots$$

- ... und zeigen, dass $\mathbb{P}^*$ ein äquivalentes Martingalmaß ist.

ToDo-Liste

1. Wiederholung: Äquivalente Martingalmaße in arbitragefreien Märkten im Ein-Perioden-Modell.

2. Was sind lokale Märkte?
   Warum sind sie arbitragefrei?

3. Konstruktion von $\mathbb{P}^*$.

4. $\mathbb{P}^*$ ist ein äquivalentes Martingalmaß:

   (a) $\mathbb{P}^*$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

   (b) $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$.

   (c) $\tilde{S}$ ist ein $\mathbb{P}^*$-Martingal, d.h. für alle $0 \leqslant k \leqslant d$ und alle $0 \leqslant t < T$ gilt

$$\mathbb{E}^*(\tilde{S}_k(t+1)|\mathcal{F}_t) = \tilde{S}_k(t).$$

Wiederholung: State-Price-Vektor

Sei $\mathcal{M}$ ein arbitragefreier Markt im Ein-Perioden-Modell mit $\Omega = \{\omega_1, \ldots \omega_N\}$, Preisen zur Startzeit $S(0) = (S_i(0))_{0 \leqslant i \leqslant d}$ und Preisen zur Endzeit $S = \Big(S_i(T, \omega_j)\Big)_{\substack{0 \leqslant i \leqslant d \\ 1 \leqslant j \leqslant N}}$.

Dann existiert ein State-Price-Vektor $\psi \in \mathbb{R}^N$, d.h. $\psi_i > 0$ für alle i und es gilt

$$S\psi = S(0),$$

also

$$\sum_{j=1}^{N} S_i(T, \omega_j)\psi_j = S_i(0),$$

oder

$$\sum_{j=1}^{N} \tilde{S}_i(T, \omega_j)\psi_j \frac{\beta(0)}{\beta(T, \omega_j)} = \tilde{S}_i(0)$$

für alle $i \in \{0, \ldots, d\}$. Für $i = 0$ erhält man insbesondere

$$\sum_{j=1}^{N} \psi_j \frac{\beta(0)}{\beta(T, \omega_j)} = 1.$$

Wiederholung: Äquivalente Martingalmaße im Ein-Perioden-Modell

Damit induziert

$$\mathbb{P}^*(\{\omega_i\}) := \psi_i \frac{\beta(0)}{\beta(T, \omega_i)}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Wegen $\psi_i, \beta(0), \beta(T, \omega_i) > 0$ gilt $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$.

Außerdem ist für alle $i \in \{0, \ldots, d\}$ und alle $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*(\tilde{S}_i(T)|\{\emptyset, \Omega\})(\omega) &= \mathbb{E}^*(\tilde{S}_i(T)) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}^*(\{\omega_j\}) \tilde{S}_i(T, \omega_j) \\
&= \tilde{S}_i(0).
\end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{P}^*$ ein äquivalentes Martingalmaß.

Markt $\mathcal{M}_{t,A}$:

- $\Omega_{t,A} = \{A_1, \ldots, A_s\}$
- $\mathbb{F} = (\{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{P}(\Omega))$
- $\mathbb{P}_{t,A}(A_i) = \mathbb{P}(A_i|A)$
- Zeiten t und $t+1$
- $d+1$ Wertpapiere
- $S_i^{t,A}(t) = S_i(t,a)$ mit $a \in A$ beliebig
- $S_i^{t,A}(t+1, A_j) = S_i(t+1, a_j)$ mit $a_j \in A_j$ beliebig

Arbitragefreiheit lokaler Märkte

Wir kennen schon das folgende

Lemma. *In einem arbitragefreien Markt $\mathcal{M}$ gilt für alle selbstfinanzierenden Anlagestrategien φ, alle $t \in \{0.\ldots,T-1\}$ und alle $A \in \mathcal{P}_t$*

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\tilde{V}_\varphi(t+1) - \tilde{V}_\varphi(t) \geqslant 0|A) = 1 \\ \Longrightarrow\ & \mathbb{P}(\tilde{V}_\varphi(t+1) - \tilde{V}_\varphi(t) = 0|A) = 1 \end{aligned}$$

Mit unserer Notation von $\mathcal{M}_{t,A}$ und einer Anlagestrategie φ für $\mathcal{M}_{t,A}$ mit

$$\mathbb{P}_{t,A}(\tilde{V}_\varphi(t) = 0) = \mathbb{P}_{t,A}(V_\varphi(t) = 0) = 1$$

bedeutet das

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{t,A}(\tilde{V}_\varphi(t+1) \geqslant 0) = 1 \\ \Longrightarrow\ & \mathbb{P}_{t,A}(\tilde{V}_\varphi(t+1) = 0) = 1. \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{M}_{t,A}$ arbitragefrei.

Konsequenz: Es existieren Maße $\mathbb{P}^*_{t,A}$ auf $\Omega_{t,A}$ mit

- $\mathbb{P}^*_{t,A}(A_i) > 0$
- $\sum_{i=1}^{s} \mathbb{P}^*_{t,A}(A_i) = 1$
- $\sum_{i=1}^{s} \mathbb{P}^*_{t,A}(A_i)\tilde{S}_k(t+1, a_i) = \tilde{S}_k(t, a)$

Definiere $A_{t,\omega}$ als die Menge in $\mathcal{P}_t$, die ω enthält. Dann gilt

$$\mathbb{P}(\omega) = \prod_{t=0}^{T-1} \mathbb{P}_{t,A_{t,\omega}}(A_{t+1,\omega}).$$

In Analogie dazu definiere

$$\mathbb{P}^*(\omega) = \prod_{t=0}^{T-1} \mathbb{P}^*_{t,A_{t,\omega}}(A_{t+1,\omega}).$$

$\mathbb{P}^*$ ist Wahrscheinlichkeitsmaß

Es reicht zu zeigen: $\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}^*(\omega)=1$.

Lemma. *Für alle* $0\leqslant t<T$ *und alle* $A\in\mathcal{P}_t$ *gilt*

$$\sum_{\omega\in A}\prod_{\tau=t}^{T-1}\mathbb{P}^*_{\tau,A_{\tau,\omega}}(A_{\tau+1,\omega})=1.$$

Beweis. Rückwärtsinduktion:

$$t=T-1:\quad \sum_{\omega\in A}\mathbb{P}^*_{T-1,A}(\{\omega\})=1$$

nach Konstruktion. Sei nun $t<T-1$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\omega\in A}\prod_{\tau=t}^{T-1}\mathbb{P}^*_{\tau,A_{\tau,\omega}}(A_{\tau+1,\omega})\\
&=\sum_{i=1}^{s}\sum_{\omega\in A_i}\prod_{\tau=t}^{T-1}\mathbb{P}^*_{\tau,A_{\tau,\omega}}(A_{\tau+1,\omega})\\
&=\sum_{i=1}^{s}\mathbb{P}^*_{t,A}(A_i)\sum_{\omega\in A_i}\prod_{\tau=t+1}^{T-1}\mathbb{P}^*_{\tau,A_{\tau,\omega}}(A_{\tau+1,\omega})\\
&=\sum_{i=1}^{s}\mathbb{P}^*_{t,A}(A_i)=1 \qquad\qquad \square
\end{aligned}$$

Folgerung: $\mathbb{P}^*(A) = \prod_{\tau=0}^{t-1} \mathbb{P}^*_{\tau,A_{\tau,\omega}}(A_{\tau+1,\omega})$ und $\mathbb{P}^*(\omega|A) = \prod_{\tau=t}^{T-1} \mathbb{P}^*_{\tau,A_{\tau,\omega}}(A_{\tau+1,\omega})$.

$\mathbb{P}^*$ ist äquivalentes Martingalmaß

$\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ ist klar.
Außerdem ist für $\omega \in A \in \mathcal{P}_t$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^*(\tilde{S}_k(t+1)|\mathcal{F}_t)(\omega) \\
=& \sum_{\omega' \in A} \tilde{S}_k(t+1,\omega')\mathbb{P}^*(\omega'|A) \\
=& \sum_{i=1}^{s} \sum_{\omega' \in A_i} \tilde{S}_k(t+1,\omega')\mathbb{P}^*(\omega'|A) \\
=& \sum_{i=1}^{s} \tilde{S}_k(t+1,a_i)\mathbb{P}^*_{t,A}(A_i) \sum_{\omega' \in A_i} \mathbb{P}^*(\omega'|A_i) \\
=& \sum_{i=1}^{s} \tilde{S}_k(t+1,a_i)\mathbb{P}^*_{t,A}(A_i) \\
=& \tilde{S}_k(t,\omega)
\end{aligned}$$

Beispiel

Es sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$,
$\mathbb{F} = (\{\emptyset, \Omega\}, \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \Omega\}, \mathcal{P}(\Omega))$,
$S_0(t, \omega) = (1 + r)^t$ und $S_1(t, \omega)$ durch die folgende Tabelle gegeben.

<table>
<tr><th>ω \ t</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th></tr>
<tr><td>ω_1</td><td rowspan="4">5</td><td rowspan="2">8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>ω_2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>ω_3</td><td rowspan="2">4</td><td>6</td></tr>
<tr><td>ω_4</td><td>3</td></tr>
</table>

Dann ist

$$\mathbb{P}^*_{0,\Omega}(\{\omega_1, \omega_2\}) = \frac{1+5r}{4}$$
$$\mathbb{P}^*_{0,\Omega}(\{\omega_3, \omega_4\}) = \frac{3-5r}{4}$$

$$\mathbb{P}^*_{1,\{\omega_1,\omega_2\}}(\{\omega_1\}) = \frac{2+8r}{3}$$
$$\mathbb{P}^*_{1,\{\omega_1,\omega_2\}}(\{\omega_2\}) = \frac{1-8r}{3}$$

$$\mathbb{P}^*_{1,\{\omega_3,\omega_4\}}(\{\omega_3\}) = \frac{1+4r}{3}$$
$$\mathbb{P}^*_{1,\{\omega_3,\omega_4\}}(\{\omega_4\}) = \frac{2-4r}{3}.$$

Berechnung von $\mathbb{P}^*_{1,\{\omega_1,\omega_2\}}$

In $\mathcal{M}_{1,\{\omega_1,\omega_2\}}$ ist $\Omega_{1,\{\omega_1,\omega_2\}} = \{\{\omega_1\},\{\omega_2\}\}$,

$$S^{1,\{\omega_1,\omega_2\}} = \begin{pmatrix} S_0^{1,\{\omega_1,\omega_2\}}(2,\{\omega_1\}) & S_0^{1,\{\omega_1,\omega_2\}}(2,\{\omega_2\}) \\ S_1^{1,\{\omega_1,\omega_2\}}(2,\{\omega_1\}) & S_1^{1,\{\omega_1,\omega_2\}}(2,\{\omega_2\}) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (1+r)^2 & (1+r)^2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

und

$$S^{1,\{\omega_1,\omega_2\}}(1) = \begin{pmatrix} S_0^{1,\{\omega_1,\omega_2\}}(1) \\ S_1^{1,\{\omega_1,\omega_2\}}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+r \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Als Lösung von $S^{1,\{\omega_1,\omega_2\}}\psi = S^{1,\{\omega_1,\omega_2\}}(1)$ erhalten wir

$$\psi = \begin{pmatrix} \frac{2+8r}{3(1+r)} \\ \frac{1-8r}{3(1+r)} \end{pmatrix}$$

Damit ist wegen $\frac{\beta^{1,\{\omega_1,\omega_2\}}(1)}{\beta^{1,\{\omega_1,\omega_2\}}(2,\{\omega_i\})} = 1+r$

$$\mathbb{P}^*_{1,\{\omega_1,\omega_2\}}(\{\omega_1\}) = (1+r)\psi_1 = \frac{2+8r}{3}$$
$$\mathbb{P}^*_{1,\{\omega_1,\omega_2\}}(\{\omega_2\}) = (1+r)\psi_2 = \frac{1-8r}{3}.$$

Berechnung von $\mathbb{P}^*$

Insgesamt ist nun

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*(\omega_1) &= \mathbb{P}^*_{0,\Omega}(\{\omega_1,\omega_2\}) \cdot \mathbb{P}^*_{1,\{\omega_1,\omega_2\}}(\{\omega_1\}) \\ &= \frac{1+5r}{4} \cdot \frac{2+8r}{3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*(\omega_2) &= \mathbb{P}^*_{0,\Omega}(\{\omega_1,\omega_2\}) \cdot \mathbb{P}^*_{1,\{\omega_1,\omega_2\}}(\{\omega_2\}) \\ &= \frac{1+5r}{4} \cdot \frac{1-8r}{3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*(\omega_3) &= \mathbb{P}^*_{0,\Omega}(\{\omega_3,\omega_4\}) \cdot \mathbb{P}^*_{1,\{\omega_3,\omega_4\}}(\{\omega_3\}) \\ &= \frac{3-5r}{4} \cdot \frac{1+4r}{3}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*(\omega_4) &= \mathbb{P}^*_{0,\Omega}(\{\omega_3,\omega_4\}) \cdot \mathbb{P}^*_{1,\{\omega_3,\omega_4\}}(\{\omega_4\}) \\ &= \frac{3-5r}{4} \cdot \frac{2-4r}{3}.\end{aligned}$$