Das No-Arbitrage Theorem

Jürgen Schütz und Jennifer Wöß

11. Juni 2004

Der zweite Beweis

(mit Farkas' Lemma)

No-Arbitrage Theorem

$$\mathcal{M} \text{ arbitragefrei}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists_{\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}} \quad \tilde{S} \text{ ist } \mathbb{P}^*\text{-Martingal.}$$

Beweis

$\Leftarrow$ Igor am 28. Mai 2004

$\Rightarrow$ 1.Version: Jürgen am 4. Juni 2004
(via lokaler Arbitragefreiheit)
2.Version: Jenny am 11. Juni 2004
(mit Farkas' Lemma)

Übersicht

1. Konstruktion von $\mathbb{P}^*$ äquivalent zu $\mathbb{P}$:
   (a) Zeige: $\mathcal{V} \cap \Gamma = \emptyset$ mit
   $$\begin{aligned} \mathcal{X} &:= \{ \text{ Zufallsvariablen } X \text{ auf } (\Omega, \mathcal{F})\} \\ \mathcal{V} &:= \{X \in \mathcal{X} : \ X = \tilde{G}_{\varphi'}(T), \\ &\qquad\qquad \varphi' \text{ vorhersagbar}\} \\ \Gamma &:= \{X \in \mathcal{X}^+ : \ \forall_{\omega\in\Omega} X(\omega) \geq 0 \\ &\qquad\qquad \exists_{\omega\in\Omega} X(\omega) > 0\} \end{aligned}$$
   (b) Finde mit Farkas' Lemma $\lambda > 0 \in \mathbb{R}^\Omega$, so daß gilt:
   $$\forall_{\varphi' \text{ vorhersagbar}} \quad \lambda^T \tilde{G}_{\varphi'}(T) = 0.$$
   (c) Definiere ein zu $\mathbb{P}$ äquiv. Maß $\mathbb{P}^*$:
   $\forall_{\omega\in\Omega} \quad \mathbb{P}^*(\{\omega\}) := \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega'\in\Omega} \lambda(\omega')} > 0$

2. Zeige: $\tilde{S}$ ist Martingal bzgl. $\mathbb{P}^*$, d.h.:
   $\forall_{i=1,\ldots,d} \quad \mathbb{E}\left(\sum_{\tau=1}^{T} \varphi_i(\tau)\Delta\tilde{S}_i(\tau)\right) = 0.$

1.(a) Zeige: $\mathcal{V} \cap \Gamma = \emptyset$

Hilfssatz 3

In einem arbitragefreien Markt erfüllt jede vorhersagbare Anlagestrategie
$\varphi' = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)^T$

$$\tilde{G}_{\varphi'}(T) \notin \Gamma.$$

Zur Erinnerung:

Proposition 3 von Nadine

$$\underbrace{\begin{array}{l}(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_d(t))^T \text{ vorhersagbar} \\ V_\varphi(0) \text{ ist } F_0\text{-meßbar}\end{array}}_{\Rightarrow}$$

$$\dot{\exists}_{(\varphi_0(t))_{t=1}^T} \quad \varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_d)^T \text{ selbstfin.}$$
$$\text{mit} V_\varphi(0) = V_0 = 0.$$

Proposition 2 von Nadine

Eine Anlagestrategie φ ist genau dann selbstfinanzierend, wenn gilt:

$$\tilde{V}_\varphi(t) = V_\varphi(0) + \tilde{G}_\varphi(t) \qquad t = 0, 1, \ldots, T$$

1.b) Farkas' Lemma

$$\exists_{\lambda>0}\forall_{\varphi' \text{ vorhersagbar}} \qquad \lambda^T \tilde{G}_{\varphi'}(T) = 0.$$

Farkas' Lemma Original

Für eine gegebene $m \times n$ Matrix A und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:

1. $\exists_{x\in\mathbb{R}^n, x\geq 0} \qquad Ax = b$
2. $\exists_{y\in\mathbb{R}^m} \qquad y^T A \leq 0 \quad \wedge \quad y^T b > 0.$

Hilfssatz 2 (Farkas' Lemma Variante)

Für eine gegebene $m \times n$ Matrix M gilt genau eine der folgenden Aussagen:

1. $\exists_{x\in\mathbb{R}^n, x>0} \qquad Mx = 0$
2. $\exists_{y\in\mathbb{R}^m} \qquad y^T M \geq 0 \quad \wedge \quad y^T M \neq 0.$

1.c) Definition des äquiv. Maßes $\mathbb{P}^*$

$$\forall_{\omega\in\Omega} \quad \mathbb{P}^*(\{\omega\}) := \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega'\in\Omega}\lambda(\omega')} > 0$$

Zur Erinnerung:

Zwei Maße $\mathbb{P}$ und $\mathbb{P}^*$ auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F})$ sind genau dann äquivalent, wenn

$$\forall_{\omega\in\Omega} \qquad \mathbb{P}(\omega) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}^*(\omega) = 0.$$

Annahme im Markt $\mathcal{M}$:

$$\forall_{\omega\in\Omega} \qquad \mathbb{P}(\omega) > 0.$$

2. Zeige: $\tilde{S}$ ist Martingal bzgl. $\mathbb{P}^*$

Zur Erinnerung:

Martingaltransformationslemma (Igor)

Eine Folge von reell integrierbaren Zufallsvariablen $\{M_n\}$ ist genau dann ein Martingal, wenn für alle beschränkten, vorhersehbaren Folgen $\{H_n\}$ gilt:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} H_k \Delta M_k\right) = 0 \qquad \text{f.a. } n = 1, 2, \ldots.$$

äquivalentes Martingalmaß (Igor)

Ein W-Maß $\mathbb{P}^*$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ äquivalent zu $\mathbb{P}$ wird Martingalmaß von $\tilde{S}$ genannt, falls der Prozess $\tilde{S}$ ein $\mathbb{P}^*$-Martingal bezüglich der Filtration $\mathbb{F}$ ist. Mit $\mathcal{P}(\tilde{S})$ wird die Klasse der äquivalenten Martingalmaße bezeichnet.