Einführung in die Finanzmathematik
Grundlagen

SoSe 2004

Mareen Hofmann, Sonja Lange

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Finanzmärkte und Instrumente **2**
2.1 Finanzmärkte 2
2.2 Grundlegende Wertpapiere 2
2.3 Derivative Instrumente 2
2.4 Typische Marktteilnehmer 3

3 Modellannahmen **3**

4 Arbitrage **4**

5 Put-Call-Beziehungen und Schranken für Optionspreise **4**
5.1 Einflussfaktoren auf Optionspreise 4
5.2 Put-Call-Parität 4
5.3 Schranken für Optionspreise 4

6 Das Ein-Perioden-Modell **5**
6.1 Optionspreis via Erwartungswertprinzip (EWP) 5
6.1.1 Beispiel 5
6.2 Optionspreisbestimmung via No-Arbitrage-Prinzip (NAP) 6
6.2.1 Beispiel (duplizierendes Portfolio) 6

7 Allgemeines Ein-Perioden-Modell **7**
7.1 Das Modell 7
7.1.1 Theorem 9
7.2 risk-neutral probability (RNP) 9
7.2.1 Beispiel 9
7.3 equivalent martingale measure (EMM) 10
7.3.1 Eindeutigkeit des EMM 11
7.3.2 Theorem 11
7.4 Zusammenhang RNP – EMM 11
7.5 Beispiel 11

8 Ein Zwei-Perioden-Modell **12**
8.0.1 Beispiel 13

9 Zusammenfassung **13**

10 Literatur **13**

1 Einleitung

2 Finanzmärkte und Instrumente

2.1 Finanzmärkte

- Markt (allg.): Gesamtheit von Nachfrage, Angebot und Realisierung von Vermögensmasse, deren Preis sich aus dem Wechselspiel von Angebot und Nachfrage ergibt.

2.2 Grundlegende Wertpapiere

- Aktie
  Aktien sind Beteiligungspapiere (partial ownership) an einer Firma (Aktiengesellschaft); alle Aktien zusammen (meist mehrere Millionen) ergeben das Grundkapital der Firma.
  Grundlegende Rechte der Anleger:
  - Recht auf Mitsprache
  - Recht auf Gewinnbeteiligung: Dividende

  Der Aktienkurs ergibt sich aus Angebot und Nachfrage nach der entsprechenden Aktie an der Börse. Dies wird wiederum von der Höhe der Dividendenausschüttung pro Aktie und von dem vermeintlichem Potenzial der Aktie, weitere Kursgewinne zu erzielen bestimmt.
- Festverzinsliche Wertpapiere
- Währung
- Index

2.3 Derivative Instrumente

Def. 2.1 (Derivative Finanzinstrumente) *Derivative Finanzinstrumente sind Finanzverträge, deren Wert zum Ausübungstermin T genau bestimmt sind durch den Wert ihrer Basispapiere zum Zeitpunkt T.*

Wichtige Derivative:

- Futures, Forwards, Swaps
- Optionen

Def. 2.2 *Eine Option ist ein Vertrag mit dem der Käufer der Option sind das* Recht *(aber nicht die Pflicht erwirbt), eine vereinbarte Transaktion (Kauf oder Verkauf eines bestimmten Finanzgutes, dem Basiswert / underlying, in einer vereinbarten Menge, der Kontraktgröße) an (oder auch bis zu) einem bestimmten Termin (Ausübungstermin, Verfallstermin oder Ausübungsfrist)zu einem festgelegten Preis (Ausübungspreis) durchzuführen.*

Terminologie:

Call	Recht zu kaufen
Put	Recht zu verkaufen
europäisch	Transaktion nur an dem Ausübungstermin möglich
amerikanisch	Transaktion bis zum und an dem Ausübungstermin
long position	Der Käufer der Option ist in der *long position*
short position	Der Verkäufer ist in der *short position*
Vanille Optionen	einfache, standardisierte Optionen
exotic options	komplexere Optionen

Betrachte eine europäische Call Option mit Ausübungspreis K, Anfangszeitpunkt $t = 0$, Ausübungstermin T, und dem Preis des Basiswertes zum Zeitpunkt t $S(t)$. Wenn

- $S(t) > K$ die Option ist *im Geld*
- $S(t) < K$ die Option ist *aus dem Geld*
- $S(t) = K$ die Option ist *am Geld*

Payoff (Gewinn):

$$S(T) - K \text{ für } S(T) > K \qquad \text{und} \qquad 0 \text{ sonst}$$

(kurz: $C = max\{S(T) - K, 0\}$ oder wie in [3]: $C = (S(T) - K)^+$))

2.4 Typische Marktteilnehmer

- Hedger
- Spekulateure
- Arbitrageure

3 Modellannahmen

Allgemeine Annahmen:

- Keine Marktreibungen
- Kein Nichtzahlungsrisiko-Risiko
- Markt mit Konkurrenz
- Rationale Agenten
- Keine Arbitragemöglichkeiten

4 Arbitrage

Als Arbitrage wird ganz allgemein ein risikoloser Gewinn ohne eigenen Kapitaleinsatz beim Handel mit Finanzgütern genannt. Dahinter steht der Gedankengang, dass es nicht möglich sein soll, einen Profit zu garantieren ohne einem Risiko ausgesetzt zu sein.

Def. 4.1 (No-Arbitrage-Prinzip) *Das No-Arbitrage-Prinzip besagt, dass es keine Arbitragemöglichkeiten gibt.*

Duplikationsprinzip 4.1 *Haben zwei Portfolios morgen den gleichen Wert, wie immer sich der Markt von heute auf morgen entwickelt, dann haben sie auch heute den gleichen Wert.*

5 Put-Call-Beziehungen und Schranken für Optionspreise

5.1 Einflussfaktoren auf Optionspreise

Einflussfaktor	Wert einer Call-Option	Wert einer Put-Option
Aktienkurs $S(t)$ $\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
Ausübungspreis K $\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
Volatilität σ $\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
Zinssätze (der Zentralbanken) r $\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
Zeitspanne bis zum Ausübungstermin $T-t$ $\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Tabelle 1: Einflussfaktoren des Optionspreises; jeweils nur eine Größe ändert sich

5.2 Put-Call-Parität

Proposition 5.1 (Put-Call-Parität) *Es gilt die folgende Put-Call-Parität für europäische Optionen auf dividendenlose Aktien:*

$$S + P - C = Ke^{-r(T-t)}$$

5.3 Schranken für Optionspreise

Proposition 5.2 *Es gelten die folgenden Schranken für europäische* und *amerikanische Optionen:*

1. $C \geq max\{S - e^{-rT}K, 0\} = (S - e^{-rT}K)^+$,
2. $C \leq S$.

Offensichtlich ist, dass der Wert einer amerikanischen Option größer oder gleich dem einer europäischen sein muss. Interessanterweise gilt sogar:

Proposition 5.3 *Es is nie vorteilhaft eine amerikanische Call Option vor dem Ausübungstermin auszuüben, d.h. es gilt:*

$$C_A = C_E.$$

Proposition 5.4 *(i) Für bis auf den Ausübungspreis identische Call Optionen (gleiche Basiswerte und gleicher Ausübungstermin) gelten die folgenden Beziehungen:*
(a) $C(K_1) \geq C(K_2)$ *für* $K_2 \geq K_1$
(b) $e^{-rT}(K_2 - K_1) \geq C(K_1) - C(K_2)$, *für* $K_2 \geq K_1$
(c)

$$\lambda C(K_1) + (1-\lambda)C(K_2) \geq C(\lambda K_1 + (1-\lambda)K_2),$$

if $K_2 \geq K_1$ *und* $0 \leq \lambda \leq 1$.
(ii) Für bis auf den Ausübungstermin identische Call Optionen (gleiche Basiswerte und gleicher Ausübungspreis) gilt:

$$C(T_2) \geq C(T_1), \textit{für } T_2 \geq T_1.$$

Proposition 5.5 *Es gilt die folgende Put-Call-Beziehung für amerikanische Optionen:*

$$S - K \leq C_A - P_A \leq S - Ke^{-rT}.$$

6 Das Ein-Perioden-Modell

Das Ein-Perioden-Modell ist das einfachste Modell, um die Grundlegende Idee der Preisgebung von derivaten Finanzinstrumenten zu erklären. Da wir uns speziell mit Optionen beschäftigen, werden sich die Beispiele auf Optionen beziehen.
Zuerst werden wir die intuitive Idee zur Optionspreisberechnung via *Erwartungwertprinzip* vorstellen und dann sehen, wie man mittels *Duplikationsprinzip* den *richtigen* Optionspreis bestimmen kann.
Später werden wir sehen, dass man den Optionspreis auch über den Erwartungswert berechnen kann, jedoch nur bezüglich eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsmaßes ($\looparrowright$ equivalent martingale measure).

6.1 Optionspreis via Erwartungswertprinzip (EWP)

6.1.1 Beispiel

- Sei $S(t)$ der Aktienpreis zum Zeitpunkt t
- Sei $C(t)$ der Gewinn (payoff) des europäischen Calls zum Zeitpunkt t
- Sei K der Ausübungspreis (strike price)
- Es gibt nur 2 Zeitpunkte, $t = 0$ und $t = T$

Nun sei $K = 110$, $S(0) = 100$, $S(T) = 130$ mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.6$ und damit $C(T) = 20$, $S(T) = 80$ mit Wahrscheinlichkeit $1 - p = 0.4$ und somit $C(T) = 0$
$\Rightarrow \mathbb{E}(C(T)) = p20 + (1-p)0 = 20p = 12$
Mit dem Verzinsungsfaktor r gilt:

$$C(0) = \frac{\mathbb{E}(C(T))}{1+r}$$

Für $r = 0.03$ ist das:

$$C^{EWP}(0) \ = \frac{12}{1.03} = 11.65$$

Wie wir sehen werden bietet dieser Ansatz Arbitragemöglichkeiten. Dazu konstruieren wir ein Portfolio (↬duplizierendes Portfolio), dass bei $t = 0$ den Wert 0 hat und bei $S(T)$ in beiden Fällen einen positiven Wert erzielt, was nach unserer Modellannahme (arbitragefreie Märkte, keine Transaktionskosten) nicht sein sollte.

- $S(0) = 100$

Aktion	Geldfluß
verkaufe 1 Call-Option	+11.65
leihe 28.35 Geld	+28.35
kaufe 0.4 Aktien	-40
Balance	0

- $S(T) = 130$

Aktion	Geldfluß
leihe 0.6 Aktien	-
verkaufe 1 Aktie(Option)	110
kaufe 0.6 Aktien	-0.6*130 = -78
gib 0.6 Aktien zurück	-
zahle 28.35 mit Zins zurück	-1.03*28.35 = -29.20
Balance	2,80

- $S(T) = 80$

Aktion	Geldfluß
verkaufe 0. Aktien	0.4*80 = 32
zahle 28.35 mit Zins zurück	-1.03*28.35 = -29.20
Balance	2,80

Wir sehen, dass diese Methode der Optionspreisbestimmung Möglichkeiten für Arbitrage liefert und versuchen den nächsten Ansatz:

6.2 Optionspreisbestimmung via No-Arbitrage-Prinzip (NAP)

Aus dem *No-Arbitrage-Prinzip* (es gibt kein Arbitrage auf den Märkten) folgt das *Duplikationsprinzip* (liefern zwei Güter die gleichen Zahlungsströme, so müssen ihre Preise zu jedem Zeitpunkt übereinstimmen).
Die Idee ist nun, dass wir ein duplizierendes Portfolio (siehe oben) konstruieren, dessen Wert zum Zeitpunkt T mit dem Optionswert zum Zeitpunkt T ($C(T)$) übereinstimmt. Dann müssen die Preise auch zum Zeitpunkt 0 übereinstimmen und der Wert des Portfolios entspricht dann dem Optionspreis.

6.2.1 Beispiel (duplizierendes Portfolio)

Der Verkäufer der Option stellt zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Portfolio aus $(Aktie, Geld) = (x, y)$ zusammmen. Der Wert des Portfolios, man nennt es auch duplizierendes

Portfolio, sollte zum Zeitpunkt T gleich dem Wert der Option sein, d.h.:

$$130x + 1,03y = 20$$

$$80x + 1.03y = 0$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung: $(x, y) = (0.4, -31.07)$.
Nun haben wir solch ein Portfolio konstruiert, welches unabhängig von den Wahrscheinlichkeiten der Kursentwicklung der Aktie die Kosten für eine Auszahlungsverpflichtung der Option bereitstellt.
In unserem Beispiel heißt das, dass 0.4 Aktien gekauft und 31.07 Geldeinheiten geliehen werden müssen.
Nun ergibt sich der Optionspreis:

$$C^{NAP}(0) \ = xS_0 + y1 = 0.4 * 100 - 31.07 = 8.93$$

Der vorige Optionspreis, $C^{EWP}(0)$=11.65 war zu hoch und es resultierte ein Arbitragegewinn von 2.80. Der Zusammenhang zwischen Arbitragegewinn(A) und den beiden Optionspreisen ($C^{EWP}(0)$, $C^{NAP}(0)$) ist folgender:

$$2.80 = (1 + 0.03)(11.65 - 8.93)$$

$$A = (1 + r)(C^{EWP}(0) - C^{NAP}(0))$$

7 Allgemeines Ein-Perioden-Modell

7.1 Das Modell

- zwei Zeitstufen, $t = 0$ und $t = T$
- $d+1$ Wertpapiere, deren Preise zum Zeitpunkt 0 durch den Vektor $S(0) = (S_0, \ldots, S_d)' \in \mathbb{R}^{d+1}$ dargestellt werden
- endlicher Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, F, \mathbb{P})$, wobei $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N)$ die verschiedenen Zustände, in der sich der Markt befinden kann, darstellt.
- $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0 \ \forall_{\omega \in \Omega}$ – alle Zustände sind möglich
- payoff des i-ten Wertpapiers zu allen möglichen Zuständen, $\omega_1, \ldots, \omega_N$, zur Zeit T: $S_i(T, \omega) = (S_i(T, \omega_1), \ldots, (S_i(T, \omega_N))$

- Die Handelsstrategie ist ein Vektor $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_d)' \in \mathbb{R}^{d+1}$, der beschreibt wieviel von jedem Wertpapier zum Zeitpunkt 0 gekauft wird (Einträge können auch negativ sein $\rightarrow$ short position).
- Investition zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$S(0)'\varphi = \sum_{i=0}^{d} \varphi_i S_i(0)$$

- zufälliges Endvermögen zum Zeitpunkt $t = T$, abhängig vom derzeitigen Zustand (state of the world) ω:

$$S(T,\omega)'\varphi = \sum_{i=0}^{d} \varphi_i S_i(T,\omega)$$

- In der Matrix $S \in \mathbb{R}^{(d+1)\times N}$ steht in der i-ten Spalte der Vektor, der beschreibt wie das Endvermögen zum Zeitpunkt T im Zustand ω_i aussieht.
- Jedes Endvermögen zu den Zuständen $\omega_1, \ldots, \omega_N$ kann man durch $S'\varphi \in \mathbb{R}^N$ angeben.
- In dem Modell ist eine *Arbitragestrategie* ein Vektor $\varphi \in \mathbb{R}^{d+1}$, so dass zur Zeit $t = 0$ $\quad S'(0)\varphi = 0$ ist und zur Zeit $t = T$ gilt: $\forall \omega \in \Omega : S(T,\omega)'\varphi \geq 0$ und $\exists \omega \in \Omega : S(T,\omega)'\varphi > 0$. Das heisst, dass zu einem Zustand auf jeden Fall ein positiver Ertrag (bei einer Investition von 0) erzielt wird.

Für die Vorbereitung auf das folgende Theorem:

> Die Annahme, dass keine Möglichkeit für Arbitrage existiert, kann man geometrisch deuten:
> Die Räume
>
> $$\Gamma = \{(x,y)', x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^N | x = -S(0)'\varphi, y = S'\varphi, \varphi \in \mathbb{R}^{d+1}\}$$
>
> und
>
> $$\mathbb{R}_+^{N+1} = \{z \in \mathbb{R}^{N+1} | \forall i \in \{0, \ldots, N\} : z_i \geq 0, \qquad \exists i : z_i > 0\}$$
>
> haben keine gemeinsamen Punkte. Dafür braucht man den $\looparrowright$ *Hyperebenen-Trennungssatz*
>
> > Γ lin. Unterraum des $\mathbb{R}^N$, K kompakte konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^N$, die keine gemeinsamen Punkte mit Γ hat:
> > $K \cap \Gamma = \emptyset$
> > Dann lassen sich Γ und K durch eine Hyperebene trennen, welche Γ enthält, d.h.:
> > $\exists_{\lambda \in \mathbb{R}^N} : \forall_{x \in K} : \langle x, \lambda \rangle > 0$ und $\forall_{y \in \Gamma} : \langle y, \lambda \rangle = 0$

7.1.1 Theorem

$$Kein \quad Arbitrage \Longleftrightarrow \exists_{\psi \in \mathbb{R}^N}, \forall_{i \in \{1,\ldots,N\}}, \psi_i > 0 : S\psi = S(0)$$

ψ wir auch state-price Vektor genannt, wobei ψ_i die Grenzkosten für eine weitere Einheit Geld im Zustand ω_i darstellt.
Beweis:
$' \Leftarrow'$: $S(T,\omega)'\varphi \geq 0$ (d.h. zum Zeitpunkt T ist das Endvermögen nicht negativ) mit $\omega \in \Omega$ und $\varphi \in \mathbb{R}^{d+1}$. Dann gilt:

$$S(0)'\varphi = (S\psi)'\varphi = \psi' S'\varphi \geq 0$$

Da $\psi_i > 0 \quad \forall_i$ sind keinen Arbitragemöglichkeiten vorhanden, da auch die Investition (Anfangsvermögen) zum Zeitpunkt 0 nicht negativ ist.
$' \Rightarrow'$: Es ist keine Arbitragemöglichkeit vorhanden, d.h. Γ und $\mathbb{R}_+^{N+1}$ haben keine gemeinsamen Punkte. Für $K \subset \mathbb{R}^{N+1}$ mit $K = \{z \in \mathbb{R}_+^{N+1} | \sum_{i=0}^{N} z_i = 1\}$ und Γ gilt: $K \cap \Gamma = \emptyset$. Da K kompakt und konvex ist, existiert nach dem ↬ *Hyperebenen-Trennungssatz* ein $\lambda \in \mathbb{R}^{N+1}$, so dass für alle $z \in K$ gilt:

$$\lambda' z > 0$$

und für alle $(x,y)' \in \Gamma$ gilt:

$$\lambda(x,y)' = 0$$

Wir wählen nun $z_i = 1$ (und somit die übrigen $z_i = 0$) und sehen, dass $\lambda_i > 0, i \in \{0,\ldots,N\}$ gelten muss. Durch normalisieren erhalten wir $\psi_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0}$ mit $\psi_0 = 1$. Nun setzen wir $x = -S(0)'\varphi$ und $y = S'\varphi$ und erhalten durch elementare Vektorrechnung $S\psi = S(0)$.
□

Zusammenfassung:
Kein Arbitrage $\Longleftrightarrow$ *es existiert ein state-price Vektor*

7.2 risk-neutral probability (RNP)

Der Verweis zur Wahrscheinlichkeitstheorie besteht in folgendem:
Man kann den Optionspreis auch über den Erwartungswert bestimmen, allerdings nur bezüglich der risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsverteilung.

7.2.1 Beispiel

Wir bestimmen die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten, indem wir den Aktienkurs als *faires Spiel* (Erwartungswert ist 0) bezeichnen und p durch p* ersetzen:

$$S(0) = \mathbb{E}^*(\frac{S(T)}{1+r})$$

Mit den Werten aus dem obigen Beispiel und r=0.03 ergibt sich:

$$100 = \frac{(p^*130 + (1-p^*)80}{1+0.03} \Rightarrow p^* = \frac{23}{50} = 0.46$$

Der Optionspreis bzgl. dieser Wahrscheinlichkeit ist somit:

$$C(0) = \mathbb{E}^*(\frac{C(T)}{1+r}) = \frac{20p^*}{1+r} = 8.93$$

Wir sehen, dass der Optionspreis nicht von p, sondern nur noch von der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit p^* abhängt. Im nächsten Abschnitt wird diese neue Wahrscheinlichkeitsverteilung genauer besprochen:

7.3 equivalent martingale measure (EMM)

Mittels des state-price Vektors $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_N)$ und normalisieren ($\psi_0 = \psi_1 + \cdots + \psi_N$) erhalten wir durch setzen von $q_i = \frac{\psi_i}{\psi_0}$ (Wahrscheinlichkeit, dass ω_i eintritt) ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω durch $\mathbb{Q}(\{\omega_i\}) = q_i$. Damit gilt für das i-te Wertpapier:

$$\frac{S_i(0)}{\psi_0} = \sum_{j=1}^{N} q_j S_i(T, \omega_j) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_i(T)).$$

Somit ist der normalisierte Preis des i-ten Wertpapiers der erwartete payoff bzgl. des neuen Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{Q}$.

- Wir nehmen an, dass das Wertpapier S_0 eine risikolose Geldanlage (z.B. ein Bond) ist und in allen Zuständen ω_i eine Geldeinheit einbringt. Dann gilt:

$$\frac{S_0(0)}{\psi_0} = \sum_{j=1}^{N} q_j S_0(T, \omega_j) = \sum_{j=1}^{N} q_j 1 = 1$$

- ψ_0 sei der Abzug für das Leihen von Geld. Für einen Zinssatz r gilt dann: $S_0(0) = \psi_0 = (1+r)^{-T}$

Dann gilt für den Preis des i-ten Wertpapiers zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$S_i(0) = \sum_{j=1}^{N} q_j \frac{S_i(T, \omega_j)}{(1+r)^T} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\frac{(S_i(T))}{(1+r)^T}).$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{S_i(0)}{(1+r)^0} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\frac{(S_i(T))}{(1+r)^T}).$$

Der letzte Ausdruck bedeutet gerade, dass die Prozesse $\frac{S_i(t)}{(1+r)^t}$ für $t = 0, T$ $\mathbb{Q}$-*Martingale* ('Beschreibung fairer Spiele') sind.

7.3.1 Eindeutigkeit des EMM

Um den Preis eines neuen Wertpapieres zu bestimmen, benutzen wir das EMM. Damit der Preis eindeutig ist (es gibt nur einen Preis, der Arbitrage ausschliesst), muss das EMM auch eindeutig sein. Wenn dies der Fall ist, wird der Markt (bzw. das Modell) als *vollständig* bezeichnet.
Mathematisch bedeutet das, dass die Vektoren $S_i(T)$ den ganzen $\mathbb{R}^N$ aufspannen (d.h. es gibt genau $\omega_i, i \in \{1, \ldots, N\}$ Zustände). Das führt uns zu dem:

7.3.2 Theorem

Annahme: Es gibt kein Arbitrage. Dann gilt:
Das Marktmodell ist vollständig $\Longleftrightarrow \exists_{\varphi \in \mathbb{R}^{d+1}} \forall_{\delta \in \mathbb{R}^N} : S'\varphi = \delta$ ist lösbar.

- Das Theorem besagt gerade, dass die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren in S' gleich der Anzahl der Elemente in Ω sein muss (i-te Spalte von S' beschreibt die den Wert der i-ten Aktie zu allen Zuständen $\omega_1, \ldots, \omega_N$).
- Für N Zustände können sich also bei vollständigen Märkten $N-1$ Wertpapierkurse zufällig entwickeln, d.h. ein Wertpapier muss also risikolos (z.B. ein Bond) sein.

Zusammenfassung:
Das Marktmodell ist vollständig $\Longleftrightarrow$ es existiert ein eindeutiges EMM

7.4 Zusammenhang RNP – EMM

Die Erwartungswerte bzgl. EMM ($\rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$) und RNP($\rightarrow \mathbb{E}^*$) bestimmen beide den richtigen Optionspreis und stimmen somit überein.
$\Rightarrow$ Das ist die Basis der Finanzmathematik ($\looparrowright$ *roter Faden* des Seminars)

7.5 Beispiel

- $d + 1 = 2$ Wertpapiere (einen risikolosen Bond, eine Aktie)
- $|\Omega| = 2$ mögliche Zustände
- $|\Omega| = \{\omega_1, \omega_2\}$
- $r = 0$

- $K = 110$

Dann erhalten wir:

$$S(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad S_0(T) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S_1(T) = \begin{pmatrix} 130 \\ 80 \end{pmatrix}, \quad S(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 130 & 80 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen jetzt den state-price Vekor, ψ, indem wir $S(0) = S'\psi$ lösen, d.h.:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 130 & 80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

Da schon $\psi_1 + \psi_2 = 1 (= \psi_0)$ erfüllt ist, müssen wir nicht mehr normalisieren und haben die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten berechnet, die das EMM $\mathbb{Q}$ ergeben:

$$\mathbb{Q}(\omega_1) = \frac{2}{5}, \quad \mathbb{Q}(\omega_2) = \frac{3}{5}$$

Nun wollen wir testen, ob der Markt vollständig ist, d.h. es gibt nur ein EMM. Dazu müssen wir für ein neues Wertpapier $\delta(T) = (\delta_1, \delta_2)'$ prüfen, ob es in der linearen Hülle von dem durch $S_1(T)$ und $S_2(T)$ aufgespannten Raum (hier $\mathbb{R}^2$) liegt. Das ist offensichtlich der Fall. Nun können wir ein duplizierendes Portfolio finden, indem wir $S'\varphi = \delta(T)$ lösen. Wenn wir wieder unseren europäischen Call betrachten ist $\delta_1 = 20$, $\delta_2 = 0$ und durch Lösen von:

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 130 \\ 1 & 80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich $\varphi_0 = -32$ und $\varphi_1 = 2/5$. Das sagt uns, dass wir (-)32 Geldeinheiten von der Bank leihen und 2/5 Aktien kaufen müssen.
Abgezinst mit dem Zinssatz $r = 0.03$ müssen wir uns nur $32/1.03 = 31.07$ Geldeinheiten leihen. Das gleiche Ergebnis haben wir in Beispiel 1.2.1 auch erhalten.

8 Ein Zwei-Perioden-Modell

Idee:
Im Zwei-Perioden-Modell gibt es nun drei Zeitpunkte($t = 0, T/2, T$) zu denen Transaktionen statt finden können und zwei Perioden, in denen sich die Kurse der den Derivaten zugrundeliegenden Aktien ändern können.
Es ist eine Option zum Zeitpunkt T zu bewerten, deren Endzahlung gegeben ist. Wenn wir uns eine Periode davor, also in T/2 befänden, dann kann man wie im Ein-Perioden-Modell den Optionspreis zu den verschiedenen Zuständen berechnen (dieser ist aus heutiger Sicht allerdings noch zufällig, da wir nicht

wissen, in welchem Zustand wir uns befinden). Wenn diese Preise bestimmt sind gehen wir wie gewohnt vor und haben uns somit von hinten nach vorne durch das ↬ Baumdiagramm gearbeitet. Wir betrachen also jeden Zeitschritt als ein Ein-Perioden-Modell.

8.0.1 Beispiel

- Wir haben einen Markt mit zwie Wertpapieren, einem risikolosen Bond und einer Aktie
- Der Ausübungspreis des Calls sei $K = 10$
- Wir haben die Zeitstufen $t = 0, T/2, T$ und Werte $S(0) = (1, 10)', S(T/2, \omega_1) = (1, 15)', S(T/2, \omega_2) = (1, 5)', S(T, \omega_{11}) = (1, 20)', S(T, \omega_{12}) = (1, 10)', S(T, \omega_{21}) = (1, 8)', S(T, \omega_{22}) = (1, 5)'$
- Jeder Zustand soll mit Wahrscheinlichkeit 1/2 erreicht werden.
- der payoff des Calls zu den Zuständen ω_{ij} ist $C_{\omega 11}(T) = 10, C_{\omega 12}(T) = 0, C_{\omega 21}(T) = 0, C_{\omega 22}(T) = 0$.

Dann ist die Wahrscheinlichkeit bzgl. des EEM, um den Zustand ω_{12} zu erreichen genau $p * q = 1/4$.
Rechnerisch bestimmt sich das wie folgt:

$$10 = 15p + 5(1 - p)$$

$$15 = 20q + 10(1 - q)$$

Daraus ergibt sich $p = q = 1/2$ und somit $p * q = 1/4$.
Indem wir $\mathbb{Q}$ als Maß benutzen ergibt sich der Preis eines europäischen Calls so:

$$C_{\mathbb{Q}}(0) = 10 * 1/4 + 0 * 1/4 + 0 * 1/4 + 0 * 1/4 = 5/2 = 2.5$$

9 Zusammenfassung

10 Literatur

Literatur

[1] Moritz Adelmeyer, Elke Warmuth: *Finanzmathematik für Einsteiger. Eine Einführung für Studierende, Schüler und Lehrer.*, Vieweg 2003

[2] Martin Baxter, Andrew Rennie: *Financial Calculus; An introduction to derivative pricing*, Cambridge University Press, Cambridge 1996

[3] N.H. Bingham, R. Kiesel: *Risk-Neutral Valuation. Pricing and Hedging of Financial Derivatives*, Springer, 2000

[4] R.J. Elliott, P.E. Kopp: *Mathematics of Financial Markets*, Springer, 1999.

[5] Ralf Korn: *Elementare Finanzmathematik*, Skript Fraunhofer-Institut, 2001

[6] Frank Oertl: *Diskrete Modelle in der stochastischen Finanzmathematik*, Skript Zürcher Hochschule Winterthur, WS 03/04