Risikoneutrales Bewerten und Vollständige Märkte

Leif Harraß, Adrian Haß

18./25.06.2004

1 Bewertung von Optionen

Zum Aufwärmen zunächst eine kleine Wiederholung:

Definition 1 (Bezugsrecht) *Ein* Bezugsrecht[1] *X mit Fälligkeitstag T ist eine beliebige, nicht-negative, $\mathcal{F}_T$-messbare ZV. Die Menge aller solcher ZV sei mit $\mathcal{X}^+$ bezichnet.*

Da wir uns bereits eingehend mit Strategien beschäftigt haben, wollen wir diese natürlich auch benutzen. Eine erste Idee dafür bekommen wir in nachstehender Definition:

Definition 2 (nachbildende Strategie) *Eine* nachbildende Strategie[2] *zu einem Bezugsrecht X nennen wir jede selbstfinanzierende Strategie $\varphi \in \Phi$ mit $V_\varphi(T) = X$. X heißt dann* darstellbar[3].

Das gibt uns zumindest einen Anhaltspunkt wie sich der Preis der Option dann entwickeln sollte: Entsprechend dem Wert der nachbildenden Strategie! (Denn sonst verkaufen wir das jeweils wervollere und kaufen das billige Portfolio, fahren also eine Gewinn ein, und beide Positionen stelllen sich bei T glatt. Arbitrage!)

Das versucht uns den Preis der Option einfach über die Wertentwicklung einer nachbildenden Strategie zu definieren. Dies ist jedoch nur zulässig, wenn die Wertentwicklung wohldefiniert ist. Und tatsächlich:

[1] contingent claim
[2] replicating strategy
[3] attainable

Satz 1 (Eindeutigkeit der Wertentwicklung) *Angenommen ein Markt $\mathcal{M}$ ist arbitragefrei, dann wird jedes darstellbare X eindeutig nachgebildet.*

Nun dürfen wir wie ersehnt definieren:

Definition 3 (Arbitragepreisprozess) *Sei X ein darstellbares Bezugsrecht in einem arbitragefreien Markt, dann ist der* Arbitragepreisprozess $\pi_X(t)$, *für $0 \leq t \leq T$, gegeben durch die (eindeutige) Wertentwicklung jeder nachbildenden Strategie.*

Damit sind wir keinesfalls fertig, denn das Problem solche Strategien zu finden bleibt (zumindest für den Augenblick) ungelöst. Doch uns fällt (ähnlich wie wir das schon zuvor gesehen haben) auch eine Möglichkeit ein ohne solche auszukommen. Dazu ziehen wir uns einfach auf unsere bedingten Erwartungswerte bezüglich eines Martingalmaßes zurück und erhalten:

Satz 2 (Risikoneutrale Bewertungsformel) *Für den Arbitragepreisprozess jedes darstellbaren Bezugsrecht X gilt:*

$$\pi_X(t) = \beta(t)^{-1}\mathbb{E}^*(X\beta(T) \mid \mathcal{F}_t).$$

2 Vollständige Märkte

Nun sind wir an einem Punkt angelangt, wo wir schwerlich mehr von unserem Markt erwarten können, als nur darstellbare Optionen zu enthalten, deshalb:

Definition 4 (Vollständiger Markt) *Einen Markt nennen wir vollständig, falls jedes Bezugsrecht darstellbar ist; wir also zu jeder $\mathcal{F}_T$-messbaren ZV eine nachbildende Strategie $\varphi \in \Phi$ finden können mit $V_\varphi(T) = X$.*

Wir wissen bereits (No-Arbitrage-Theorem), dass die Arbitragefreiheit des Marktes $\mathcal{M}$ die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ impliziert. Mit diesem könnten wir dann nach der Risikoneutralen Bewertungsformel alle Optionen bewerten, sofern es eindeutig ist. Und glücklicherweise gilt:

Satz 3 (Vollständigkeitstheorem) *Ein arbitragefreier Markt $\mathcal{M}$ ist genau dann vollständig, wenn ein eindeutiges Wahrscheilichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ existiert, das äquivalent zu $\mathbb{P}$ ist und unter dem die diskontierten Wertenwicklungen Martingale sind.*

Beweisidee Wir zeigen zunächst eine Richtung, danach deren Verneinung:

"$\Rightarrow$": Benutze das No-Arbitrage-Theorem um die Existenz eines EMM $\mathbb{P}^*$ zu folgern. Anschließend zeige, dass dieses auch eindeutig ist.

"$\Leftarrow$": Sei der Markt unvollständigt. Dann wissen wir immernoch, dass es ein EMM $\mathbb{P}^*$ in $\mathcal{M}$ gibt. Dazu konstruieren wir dann ein von $\mathbb{P}^*$ verschiedenes, aber äquivalentes, Maß $\mathbb{P}^{**}$, das auch ein Martingalmaß ist.

Nun sind wir am Ziel! Das No-Arbitrage- und das Vollständigkeitstheorem zusammen liefern uns folgenden fundamentalen Satz:

Satz 4 (Fundamentalsatz der Optionspreisbestimmung) *In einem arbitragefreien, vollständigen Markt $\mathcal{M}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes, äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^*$.*

Damit brauchen wir nur folgende Dinge zu kennen, um den Preis jeder Option im Markt nach der *Risikoneutralen Bewertungsformel* zu bestimmen:

- Die Menge aller Ereignisse Ω
- Den Preis von X am Endzeitpunkt für alle $\omega \in \Omega$
- Den Informationsfluss $\mathcal{F}_t$
- Das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{P}^*$