Das Cox-Ross-Rubinstein Modell und Bewertung von Europäischen Optionen

Handout – 2.7.2004, Marc Pfetsch

1 Das Cox-Ross-Rubinstein (CRR) Modell

Das CRR-Modell besteht aus T unabhängigen Binomial-Modellen:

- T Zeitschritte
- ein Sparkonto $B(t) = (1+r)^t$, r fester Zinssatz, $t = 0, \ldots, T$
- ein Wertpapier, $S(t)$, $t = 0, \ldots, T$
- Für $0 < b < a$ und $0 < p < 1$ wird festgesetzt:

$$S(t+1) = \begin{cases} a\,S(t) & \text{mit Ws. } p \\ b\,S(t) & \text{mit Ws. } 1-p \end{cases} \qquad t = 0, \ldots, T-1,\ S(0) \in \mathbb{R}_{>0}$$

- Definiere: $\Omega_t = \{a, b\}$, $\mathbb{P}_t(\{a\}) = p$, $P_t(\{b\}) = 1-p$.
- Wahrscheinlichkeitsraum: $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \Omega_T = \{a, b\}^T$
- Wahrscheinlichkeitsmaß: $\mathbb{P}((\omega_1, \ldots, \omega_T)) = \mathbb{P}_1(\{\omega_1\}) \cdots \mathbb{P}_T(\{\omega_T\})$.
- Filtration: $\mathcal{F}_t = \sigma(S(1), \ldots, S(t))$, $t = 0, \ldots, T$.

Proposition.

(i) Es existiert ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Martingalmaß für S genau dann wenn $b < 1 + r < a$.

(ii) Falls $b < 1+r < a$, so gibt es ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß Q der Form

$$Q((\omega_1, \ldots, \omega_T)) = Q_1(\{\omega_1\}) \cdots Q_T(\{\omega_T\})$$

mit $Q_i(\{a\}) = q$, $Q_i(\{b\}) = 1-q$ für $0 < q < 1$.

Korollar. Falls $b < 1 + r < a$, so ist das CRR-Modell arbitragefrei und vollständig.

2 Optionspreisbewertung

Sei $b < 1 + r < a$ und Q das (eindeutige) zu $\mathbb{P}$ äquivalente Martingalmaß mit Parameter $0 < q < 1$.

Satz. Sei $X = (S(T) - K)^+$ eine Europäische Call-Option mit Fälligkeit T und Ausübungspreis K bzgl. dem Wertpapier S; dabei ist $(x)^+ = \max\{0, x\}$. Der Arbitragepreis $C(t)$ für X ist:

$$C(t) = (1+r)^{-\tau} \sum_{j=0}^{\tau} \binom{\tau}{j} q^j (1-q)^{\tau-j} \left(S(t)\, a^j b^{\tau-j} - K\right)^+$$

wo $\tau := T - t$.

Proposition. Die selbst finanzierende vorhersehbare Strategie die obige Europäische Call-Option X darstellt (repliziert) ist:

$$\phi_0(t) = \frac{a\, C\big(t, S(t-1)\, b\big) - b\, C\big(t, S(t-1)\, a\big)}{(1+r)^t\ (a-b)}$$
$$\phi_1(t) = \frac{C\big(t, S(t-1)\, a\big) - C\big(t, S(t-1)\, b\big)}{S(t-1)\ (a-b)}$$

für $t = 0, \ldots, T$, $\tau = T - t$ und

$$C(t, Y) = (1+r)^{-\tau} \sum_{j=0}^{\tau} \binom{\tau}{j} q^j (1-q)^{\tau-j} \left(Y\, a^j b^{\tau-j} - K\right)^+.$$