Die Black-Scholes-Formel

Handout zum 9.7.2004

Wir betrachten einen festen Zeitraum $[0, T]$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ haben wir ein Cox-Ross-Rubinstein (CRR) Modell mit k_n Handelszeitpunkten und Zeitintervallen der Länge $\Delta_n = \frac{T}{k_n}$.

- Wir *wählen* eine feste Zinsrate $r \in \mathbb{R}_+$. Die Zinsrate für das Sparkonto im $n$ten Modell ist r_n. Dabei wird r_n so gewählt, dass $1 + r_n = e^{r\Delta_n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt und damit $(1 + r_n)^{k_n} = e^{rT}$.
- Wir *wählen* ein festes $\sigma \in \mathbb{R}_+$ und definieren

$$u_n = e^{\sigma\sqrt{\Delta_n}} \qquad \text{und} \qquad d_n = u_n^{-1} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}.$$

  Im $n$ten CRR-Modell steigt der Preis $S(t)$ des Wertpapiers von Zeit t zu Zeit $t + \Delta_n$ auf $u_n S(t)$ mit Wahrscheinlichkeit p_n und fällt auf $d_n S(t)$ mit Wahrscheinlichkeit $1 - p_n$. Beachte, dass für sehr große n der Markt arbitragefrei ist, weil dann $d_n < 1 + r_n < u_n$ gilt.

Satz. Für die Arbitragepreise $C_n(0)$ einer Europäischen Call-Option im $n$ten CRR-Modell mit Fälligkeit T und Ausübungspreis K bzgl. dem Wertpapier S gilt:

$$\lim_{n\to\infty} C_n(0) = C_{BS}(0),$$

wobei $C_{BS}(0)$ durch die folgende *Black-Scholes-Formel* gegeben ist:

$$C_{BS}(0) = S\, N(d_1(S,T)) - K\, e^{-rT}\, N(d_2(S,T)).$$

Dabei ist $S = S(0)$ der Preis des Wertpapiers zum Zeitpunkt 0, N die Standard-Normalverteilung und

$$d_1(s,t) = \frac{\log(s/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) t}{\sigma\sqrt{t}} \qquad d_2(s,t) = \frac{\log(s/K) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t}{\sigma\sqrt{t}}.$$

Beweisskizze:

1) Definiere $a_n = \min\{j \in \mathbb{N}_0 \,:\, S\, u_n^j\, d_n^{k_n - j} > K\}$. Damit ist a_n der kleinste Wert von j für den $(S\, u_n^j d_n^{k_n-j} - K)^+ > 0$. Das Minimum existiert, weil $\frac{u_n}{d_n} > 1$ ist.
2) Der Arbitragepreis der Option im $n$ten Modell ist also

$$C_n(0) = (1 + r_n)^{-k_n} \sum_{j=a_n}^{k_n} \binom{k_n}{j} q_n^j (1 - q_n)^{k_n - j} \left(S\, u_n^j d_n^{k_n-j} - K\right),$$

wobei q_n das äquivalente Martingalmaß definiert (siehe letzter Vortrag). Wir sind also das $(\dots)^+$ losgeworden.

3) Durch Umsortieren erhält man:

$$C_n(0) = S\Big[\sum_{j=a_n}^{k_n} \binom{k_n}{j} \left(\frac{q_n\, u_n}{1+r_n}\right)^j \left(\frac{(1-q_n)\, d_n}{1+r_n}\right)^{k_n-j}\Big]$$
$$-(1+r_n)^{-k_n}\, K\Big[\sum_{j=a_n}^{k_n} \binom{k_n}{j}\, q_n^j (1-q_n)^{k_n-j}\Big].$$

Für $\hat{q}_n = \frac{q_n\, u_n}{1+r_n}$ (welches ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert) gilt dann:

$$C_n(0) = S\left(1 - B^{k_n,\hat{q}_n}(a_n)\right) - K\,(1+r_n)^{-k_n}\left(1 - B^{k_n,q_n}(a_n)\right), \qquad (1)$$

wobei $B^{k_n,p_n}(\cdot)$ die Binomiale Verteilungsfunktion mit Parameter k_n und p_n ist. Sei Y_n eine Folge von Binomialverteilten Zufallsvariablen mit Parametern k_n und p_n; Y_n ist also Summe von k_n 0/1-wertigen Zufallsvariablen, die mit Wahrscheinlichkeit p_n eins sind. Dann ist $1 - B^{k_n,p_n}(a_n) = \mathbb{P}[a_n \le Y_n \le k_n]$.

4) Wir transformieren nun die Y_n aus Schritt 3 zu:

$$\hat{Y}_n = \frac{Y_n - k_n p_n}{\sqrt{k_n\, p_n\, (1-p_n)}},$$

womit dann $\mathbb{E}(\hat{Y}_n) = 0$ und $\mathrm{Var}(\hat{Y}_n) = 1$. Die Grenzen a_n und k_n transformieren sich zu α_n bzw. β_n, so dass

$$\mathbb{P}[a_n \le Y_n \le k_n] = \mathbb{P}[\alpha_n \le \hat{Y}_n \le \beta_n].$$

Für $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ und $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$, gilt nach dem Zentralen Grenzwertsatz:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\alpha_n \le \hat{Y}_n \le \beta_n] = N(\beta) - N(\alpha).$$

5) Für $p_n = \hat{q}_n$ kann man durch Nachrechnen zeigen, dass $\alpha = -d_1(S,T)$ und $\beta = +\infty$, womit folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - B^{k_n,\hat{q}_n}(a_n)\right) = 1 - N(-d_1(S,T)) = N(d_1(S,T))$$

Ebenso zeigt man für $p_n = q_n$, dass $\alpha = -d_2(S,T)$ und $\beta = +\infty$, womit gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - B^{k_n,q_n}(a_n)\right) = N(d_2(S,T)).$$

Mit Gleichung (1) folgt die Black-Scholes-Formel direkt.