Andrea Wiese & Nadine Schöne

Grundlagen der Finanzmathematik, SS 2004

1 Grundlagen der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie

1.1 Maßtheorie

Definition 1 *Sei Ω eine (endliche) Menge, und sei $\mathcal{A}$ ein System von Teilmengen von Ω mit den Eigenschaften*

(a) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(b) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$,

(c) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

*Dann heißt $\mathcal{A}$ eine **Algebra** auf Ω. Gilt sogar*

*(c)** $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$,

*dann heißt $\mathcal{A}$ eine **σ-Algebra**. Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ nennt man einen **messbaren Raum**.*

Definition 2 *Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ zwei messbare Räume. Eine Funktion $f : \Omega \to \Omega'$ heißt **messbar**, falls für alle $A' \in \mathcal{A}'$ gilt, daß $f^{-1}[A'] = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A'\} \in \mathcal{A}$.*

Definition 3 *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine nicht-negative Funktion, so daß $\mu(\emptyset) = 0$. μ heißt*

- ***endlich additiv**, falls für alle disjunkten Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ gilt, daß $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,*
- ***σ-additiv** (oder **Prämaß**), falls für alle Folgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ disjunkter Mengen in $\mathcal{A}$ mit $\bigcup A_n \in \mathcal{A}$ gilt, daß $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.*

Definition 4 *Ein Prämaß, das auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert ist, heißt **Maß**. Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ nennt man einen **Maßraum**.*

1.2 Wahrscheinlichkeitstheorie

Definition 5 *Ein Maß P auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß**, falls $P(\Omega) = 1$. Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nennt man einen **Wahrscheinlichkeitsraum**.*

Definition 6 *Ein Element $A \in \mathcal{A}$ nennt man **Ereignis**. Zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$ heißen **unabhängig**, falls $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Sind A, B zwei Ereignisse mit $P(B) > 0$, so bezeichnet man mit $P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von A unter Voraussetzung von B.*

Definition 7 *Sei Ω eine endliche oder abzählbare Menge, und (Ω, P) der dazugehörige diskrete Wahrscheinlichkeitsraum, dann nennt man eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine **(diskrete) Zufallsvariable**.*

Definition 8 *Die kleinste σ-Algebra, die für alle $x \in \mathbb{R}$ die Mengen $\{\omega : X(\omega) \leq x\}$ enthält, nennt man die von X* ***erzeugte σ-Algebra*** *$\sigma(X)$.*

Bemerkung 1 *Anschaulich gesehen repräsentiert $\sigma(X)$ die in X enthaltene Information, also das, was wir wissen, wenn wir X kennen.*

Definition 9 *Wenn $\sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|P(\omega)$ konvergiert, heißt $\mathbf{E}(X) := \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$ der* ***Erwartungswert*** *von X.*

Definition 10 *Die* ***Varianz*** *einer Zufallsvariable X ist definiert als*
$\mathbf{Var}[X] = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2$.

Definition 11 *Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen auf Ω. Die Familie $(X_i)_{i=1}^n$ heißt* ***unabhängig****, falls für alle $A_i \in \mathcal{B}$ gilt, daß*
$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{\omega : X_i(\omega) \in A_i\}\right) = \prod_{i=1}^n P(\{\omega : X_i(\omega) \in A_i\})$.

1.3 Filtrierungen

Wir gehen zunächst von einem diskreten Zeitverlauf aus, d.h. $t = 0, 1, 2, \ldots$, wobei wir mit $t = 0$ den Startzeitpunkt unserer Betrachtungen bezeichnen. Gibt es einen Endzeitpunkt, so bezeichnet man diesen mit $t = T$.
Da Information nicht verloren gehen soll, steht einem mit fortlaufender Zeit immer mehr Information zur Verfügung. Da σ-Algebren Information repräsentieren, benötigen wir eine Folge von σ-Algebren $\{\mathcal{F}_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ mit $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Dabei repräsentiert$\mathcal{F}_n$ die Information, die uns zum Zeitpunkt n zur Verfügung steht. $\mathcal{F}_0$ gibt uns also die "Startinformation" an (falls es keine gibt, ist $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$), und $\mathcal{F}_\infty := \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n = \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n\right)$ repräsentiert alles, was wir jemals wissen werden (die sogenannte **Doomsday σ-Algebra**).
Eine solche Familie $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ heißt **Filtrierung**, und ein Wahrscheinlichkeitsraum zusammen mit einer Filtrierung $(\Omega, \mathbb{F}, \mathcal{A}, P)$ heißt **stochastische Basis** oder **filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum**.
Für endliche $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ hat eine dazugehörige Filtrierung eine relativ einfache Form: Seien $M_1, M_2, \ldots, M_n$ die inklusionsminimalen nichtleeren Mengen in $\mathcal{A}$. Diese sind paarweise disjunkt und überdecken ganz Ω, also bildet $P_1 = (M_1, M_2, \ldots, M_n)$ die von $\mathcal{A}$ **induzierte Partition** von Ω. Sei $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$, dann vergröbert die von $\mathcal{A}'$ induzierte Partition $P_2 = (M_1', M_2', \ldots, M_m')$ die Partition $(M_1, M_2, \ldots, M_n)$. Eine Filtrierung $\mathbb{F}$ entspricht somit einer Folge von immer feiner werdenden Partitionen P_n. Wenn man zum Zeitpunkt T weiß, daß das Ereignis ω^* eingetreten ist, so kann man durch die fortschreitende Kenntnis der σ-Algebren $\mathcal{F}_n$ und somit der entsprechenden Partitionen P_n genau bestimmen, in welchem $M_i^{(n)} \in P_n$ sich ω^* befindet.

1.4 Stochastische Prozesse

Ein **stochastischer Prozess** $X = \{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ ist eine Familie von Zufallsvariablen, die auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum operieren.
Der stochastische Prozess $X = (X_n)_{n=0}^\infty$ heißt **adaptiert** zur Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$, falls X_n für alle n $\mathcal{F}_n$ messbar ist. D.h. ist X adaptiert, so kennt man zum Zeitpunkt n den Wert von X_n.
Falls $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$, so nennt man $\mathcal{F}_n$ die **natürliche Filtrierung** von X. Somit ist ein stochastischer Prozess immer zu seiner natürlichen Filtrierung adaptiert. Hat man die natürliche Filtrierung $\mathcal{F}_n = \sigma(W_0, W_1, \ldots, W_n)$ eines Prozesses $W = (W_n)$ gegeben, so ist der Prozess X adaptiert zu $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)$, genau dann wenn eine messbare Funktion f_n auf $n+1$ Variablen existiert mit $X_n = f_n(W_0, W_1, \ldots, W_n)$.
Man unterscheidet zwei Haupttypen von stochastischen Prozessen: **Markov-Prozesse** und **Martingale**. Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden besteht darin, daß bei Markov-Prozessen nur der momentane Zustand über den weiteren Verlauf des Prozesses bestimmt, während bei Martingalen jeder vorherige Zustand die Zukunft beeinflusst.

2 Das Modell

2.1 Übersicht

Das Wertpapiermarkt-Modell enthält

- einen endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $|\Omega| < \infty$ und $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$
- die (diskreten) Anlagezeitpunkte $t = 0, 1, ..., T$,
- den Finanzmarkt mit $d + 1$ Wertpapieren,
- die Preisentwicklung S mit $S(t) = (S_o(t), S_1(t), ..., S_d(t))'$, wobei die Preise der Wertpapiere zu einem bestimmten Zeitpunkt nicht-negative, F_t-meßbare Zufallsvariablen $S_i(t, \omega), i \in \{0, 1, ..., d\}$ sind und
- die Informationsstruktur $\mathbb{F} = \{F_t\}_{t=0}^T$ mit $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $F_T = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, die meist von der Preisentwicklung generiert wird.

2.2 Entwicklung des Modells

Definition 12 *Eine Preisentwicklung $(X(t))_{t=0}^T$, die für alle $t \in \{0, 1, ..., T\}$ streng positiv ist, heißt* **Numéraire**.

Ein Standardansatz ist das risikofreie Bankkonto als Numéraire. Im weiteren wird der Begriff jedoch ohne weitere Spezifikation verwendet. Wir versehen ein Numéraire aus der Menge der $d + 1$ Wertpapiere mit dem Label 0 und setzen $S_0(0) = 1$.

Definition 13 $\beta(t) := \frac{1}{S_0(t)}$ *heißt der* **Diskont-Faktor**.

Definition 14 *Eine* **Anlagestrategie** *(oder ein* **dynamischer Wertpapierbestand***) φ ist ein vektorwertiger stochastischer Prozeß*

$$\varphi = (\varphi(t))_{t=0}^T = ((\varphi_0(t, \omega), \varphi_1(t, \omega), ..., \varphi_d(t, \omega))')_{t=0}^T \in \mathbb{R}^{d+1},$$

der vorhersagbar (oder vorhersehbar) ist: Jedes $\varphi_i(t)$ ist F_{t-1}-meßbar für $t \geq 1$.

Definition 15 *Der* **Wert** *eines Wertpapierbestandes zum Zeitpunkt t ist das Skalarprodukt*

$$V_\varphi(t) = \varphi(t) \cdot S(t) := \sum_{i=0}^{d} \varphi_i(t) S_i(t), t = 1, 2, ..., T$$

und

$$V_\varphi(0) = \varphi(1) \cdot S(0).$$

Die Entwicklung $V_\varphi(t, \omega)$ nennt man die **Wertentwicklung** *der Anlagestrategie φ.*

Der Startwert $V_\varphi(0)$ wird **Initialinvestition** des Investors genannt. Die Veränderung des Marktwertes zwischen den Zeitpunkten $t - 1$ und t ist $\varphi(t) \cdot (S(t) - S(t - 1)) = \varphi(t) \cdot \Delta S(t)$.

Definition 16 *Die* **Gewinnentwicklung** *G_φ einer Anlagestrategie ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} G_\varphi(t) &= \sum_{\tau=1}^{t} \varphi(\tau) \cdot (S(\tau) - S(\tau - 1)) \\ &= \sum_{\tau=1}^{t} \varphi(\tau) \cdot \Delta S(\tau) \qquad\qquad t = 1, 2, ..., T \end{aligned}$$

Definition 17 *Sei* $\widetilde{S}(t) = (1, \beta(t)S_1(t), ..., \beta(t)S_d(t))'$ *der Vektor der* **diskontierten** *Preise, dann ist die* **diskontierte Wertentwicklung**

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_\varphi(t) &= \beta(t) \cdot (\varphi(t) \cdot S(t)) \\ &= \varphi(t) \cdot \widetilde{S}(t), \quad t = 1, 2, ..., T\end{aligned}$$

und die **diskontierte Gewinnentwicklung**

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_\varphi(t) &:= \sum_{\tau=1}^{t} \varphi(\tau) \cdot (\widetilde{S}(\tau) - \widetilde{S}(\tau - 1)) \\ &= \sum_{\tau=1}^{t} \varphi(\tau) \cdot \Delta\widetilde{S}(\tau) \qquad\qquad t = 1, 2, ..., T\end{aligned}$$

Definition 18 *Eine Strategie* φ *ist* **selbst-finanzierend**, $\varphi \in \Phi$, *wenn gilt:*

$$\varphi(t) \cdot S(t) = \varphi(t+1) \cdot S(t) \quad t = 1, 2, ..., T$$

Proposition 1 (Invarianz des Numéraires) *Sei* $X(t)$ *ein Numéraire. Eine Anlagestrategie* φ *ist genau dann selbst-finanzierend bezüglich* $S(t)$, *wenn* φ *selbst-finanzierend bezüglich* $X(t)^{-1} \cdot S(t)$ *ist.*

Corollar 1 *Eine Anlagestrategie* φ *ist genau dann selbst-finanzierend bezüglich* $S(t)$, *wenn sie selbst-finanzierend bezüglich* $\widetilde{S}(t)$ *ist.*

Proposition 2 *Eine Anlagestrategie* φ *ist genau dann selbst-finanzierend, wenn gilt:*

$$\widetilde{V}_\varphi(t) = V_\varphi(0) + \widetilde{G}_\varphi(t) \qquad t = 0, 1, ..., T$$

Proposition 3 *Wenn* $(\varphi_1(t), ..., \varphi_d(t))'$ *vorhersagbar und* $V_\varphi(0)$ F_0*-meßbar ist, gibt es eine eindeutige vorhersagbare Entwicklung* $(\varphi_0(t))_{t=1}^T$, *so daß* $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_d)'$ *selbst-finanzierend mit dem Initialwert* $V_\varphi(0) = V_0$ *des zugehörigen Wertpapierbestandes ist.*

3 Die No-Arbitrage-Bedingung

Definition 19 *Sei* $\widetilde{\Phi} \subset \Phi$ *eine Menge von selbst-finanzierenden Strategien. Eine Strategie* $\varphi \in \widetilde{\Phi}$ *heißt* **Arbitrage-Möglichkeit** *oder* **Arbitrage-Strategie** *in Bezug auf* $\widetilde{\Phi}$, *wenn*

$$\mathbb{P}\{V_\varphi(0) = 0\} = 1$$

und für den Endwert von φ *gilt:*

$$\mathbb{P}\{V_\varphi(T) \geq 0\} = 1 \quad \textbf{und} \quad \mathbb{P}\{V_\varphi(T) > 0\} > 0.$$

Also ist eine Arbitrage-Möglichkeit eine selbst-finanzierende Strategie mit Anfangswert 0, die mit Wahrscheinlichkeit 1 einen nicht-negativen Endwert und mit einer Wahrscheinlichkeit echt größer 0 einen echt positiven Endwert (d.h. einen Gewinn) hat.