4. Martingale Transformation

Savchenko Igor

Seminar Grundlagen der Finanzmathematik SoSe 04

Definition. Ein **F**-adaptierter Prozess $\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{S}_n)_{n\in T}$ heißt ein (**F**, $\boldsymbol{P}$)-Martingal wenn $E(|\boldsymbol{S}_n|) < \infty$ und $E(\boldsymbol{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n)=\boldsymbol{S}_n$
Beachte: $E(\Delta \boldsymbol{S}_{n+1}|F_n)=0$

Definition. Ein Prozess $C = (C_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt <u>*vorhersehbar*</u>, wenn C_n F_{t-1}-messbar ist.

Ihr Gewinn im n-ten Spiel: $C_n \Delta X_n = C_n(X_n - X_{n-1})$
Gesamter Gewinn bis zum Zeitpunkt n : $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n \Delta X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n(X_n - X_{n-1})$
Notation: $Y = C \bullet X,\ Y_n = (C \bullet X)_n,\ \Delta Y_n = C_n \Delta X_n$
Beachte: $(C \bullet X)_0 = 0,$ da $\sum\limits_{k=1}^{0}$ leer ist.
Wir nennen $C \bullet X$ <u>*Martingal Transformation*</u>.

Satz (Bingham Theorem 3.4.1)
i) Wenn C ein beschränkter positiver vorhersehbarer Prozess und X ein Supermartingal ist, dann ist $C \bullet X$ auch ein Supermartingal.
ii) Ist C beschränkt und vorhersehbar, und X ein Martingal, dann ist auch $C \bullet X$ ein Martingal.

Interpretation:
i) Wenn das Spiel von Anfang an unfair ist, verliert man am Ende.
ii) Wenn C ein Martingal ist, dann können wir über die Zukunft nichts voraussagen (faires Spiel).

Definition. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\boldsymbol{P}^*(\{\omega\}) > 0$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$, das zu $\boldsymbol{P}$ äquivalent ist, heißt <u>*Martingalmaß*</u> für Prozess $\boldsymbol{S}$, bezüglich der Filtration **F**, wenn $\boldsymbol{S}$ ein Martingal ist.

Das bedeutet: Wenn zu jedem denkbaren Elementarereignis eine positive Wahrscheinlichkeit bestand, dann muss das auch das Martingalmaß positiv sein.
Mit $\mathcal{P}(S)$ bezeichnen wir die Klasse von äquivalenten Martingalmaßen.

Satz (Bingham Präposition 4.2.1)

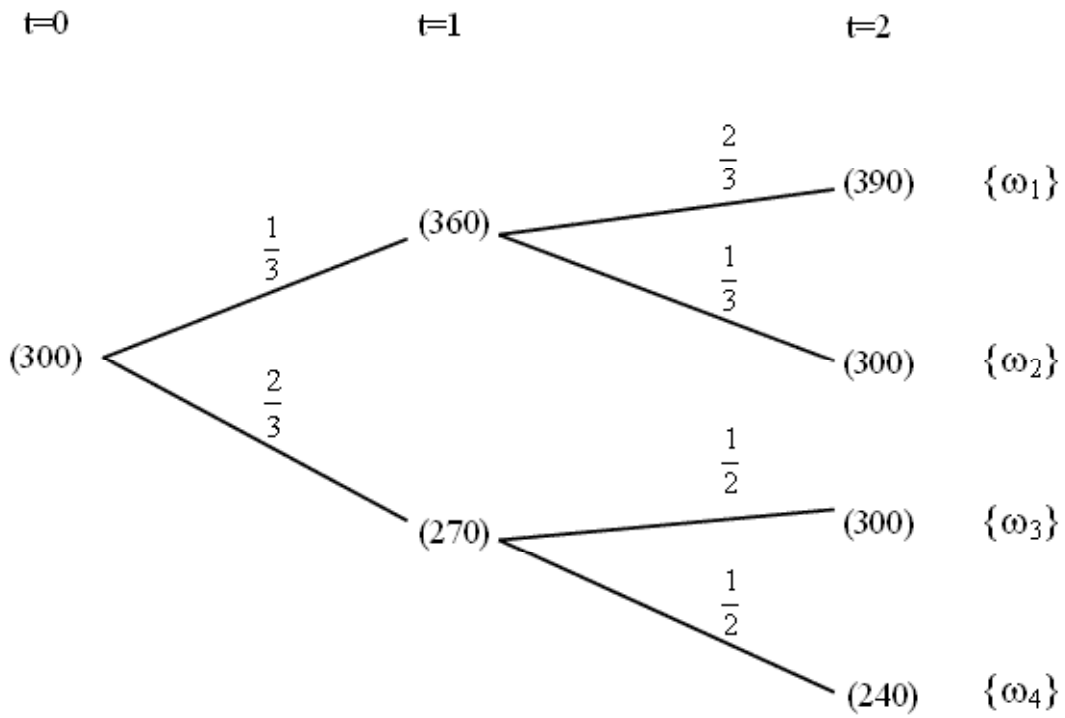
Wenn $\boldsymbol{P}^* \in \mathcal{P}(S)$ ein äquivalentes Martingalmaß ist und $\phi \in \Phi$ eine selbstfinanzierende Strategie, dann ist der Vermögensprozess $\widetilde{V}_\phi(t)$ ist ein $\boldsymbol{P}^*$ Martingal bezüglich $\mathbf{F}$.

Satz (Bingham Präposition 4.2.2, eine Richtung von **No-Arbitrage Theorem**)
Wenn ein äquivalentes Martingalmaß existiert, also $\mathcal{P}(S) \neq \emptyset$,
dann ist der Markt arbitragefrei.

Ergebnis: - Bestimme die Martingalmaß;

- Existiert ein Martingalmaß, dann entspricht der Arbitragepreis des Finanztitels X dem $E[X]$.

Beispiel: Besitzt das folgende Modell die Martingaleigenschaft?



$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\Omega\}$; $\mathcal{F}_1 = \{\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_3,\omega_4\}, \emptyset,\Omega\}$; $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$

Bedingung der Martingaleigenschaft: Für alle t muß gelten: $E\left(S_{t+1}^{|F_t}\right) = S_t$

$E\left[S_1 \mid \mathcal{F}_0\right](\omega) = \frac{1}{P(\mathcal{F}_\omega)} \sum\limits_{\tau \in \mathcal{F}_\omega} S_1(\tau) \cdot P(\{\tau\}) = S_1(\omega_1) \cdot P(\{\omega_1\}) + S_1(\omega_2) \cdot P(\{\omega_2\}) + S_1(\omega_3)$
$+S_1(\omega_4) \cdot P(\{\omega_4\}) = 360 \cdot (\frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3} + \frac{1}{3})) + 270 \cdot (\frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})) = 300 = S_0.$

Für $\mathcal{F}_1$ gilt weiter:
Für $\mathcal{F}_1 \supset$ F=$\{\omega_1,\omega_2\}$ gilt$E\left[S_2 \mid \mathcal{F}_1\right] = \frac{2}{3}390 + \frac{1}{3}300 = 360 = S_1$
Für $\mathcal{F}_1 \supset$ F=$\{\omega_3,\omega_4\}$ gilt$E\left[S_2 \mid \mathcal{F}_1\right] = \frac{1}{2}300 + \frac{1}{2}240 = 270 = S_1$

Das Modell besitzt die Martingaleigenschaft.