Proposition 1 (4.2.3) *Wenn der Markt $\mathcal{M}$ arbitragefrei ist, dann ist auch die Klasse $\mathcal{P}(\tilde{S})$ von equivalenten Martingalmaße nicht leer.*

Markt

- Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, mit $|\Omega| < \infty$ und $\wp(\{\omega\}) > 0$, f.a. $\omega \in \Omega$,
- Anlagezeitpunkte $t = 0, 1, \ldots, T$,
- $d + 1$ Wertpapiere,
- Preisentwicklung S, mit $S(t) = (S_0(t), \ldots, S_d(t))$ und f.a. $t = 0, \ldots, T$ und $i = 0, \ldots, d$ sind $S_i(t, \omega)$ F_t -meßbare Zufallsvariablen
- Informationsstruktur $\mathbb{F} = F_{t=0}^T$, mit $F_0 = \emptyset, \Omega$ und $F_T = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (generiert aus der Preisentwicklung)

Anlagestrategie

Eine Anlagestrategie φ ist ein vektorwertiger stochastischer Prozess

$$\varphi = (\varphi(t))_{t=0}^T = ((\varphi_0(t, \omega), \ldots, \varphi_d(t, \omega))')_{t=0}^T \in \mathbb{R}$$

der vorhersagbar ist, d.h. die $\varphi_i(t)$ sind F_{t-1}-meßbar.

$$\varphi \text{ selbstfinanzierend} :\Leftrightarrow \varphi(t)S(t) = \varphi(t+1)S(t) \Leftrightarrow \tilde{V}_\varphi(t) = V_\varphi(0) + \tilde{G}_\varphi(t)$$

Arbitragefreiheit

Eine Arbitragemöglichkeit ist eine selbstfinanzierende Anlagestrategie φ für die gilt:

$$\mathbb{P}(V_\varphi(0) = 0) = 1, \qquad \mathbb{P}(V_\varphi(T) \geq 0) = 1, \qquad \mathbb{P}(V_\varphi(T) > 0) > 0.$$

Ein Markt heißt arbitragefrei, wenn in der Klasse der selbstfinanzierenden Anlagenstrategien keine Arbitragemöglichkeit gibt.

äquivalentes Martingalmaß

Ein W-Maß $\mathbb{P}^*$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ äquivalent zu $\mathbb{P}$ wird Martingalmaß von $\tilde{S}$ genannt, falls der Prozess $\tilde{S}$ ein $\mathbb{P}^*$-Martingal bezüglich der Filtration $\mathbb{F}$ ist. Mit $\mathcal{P}(\tilde{S})$ wird die Klasse der äquivalenten Martingalmaße bezeichnet.

Martingaltransformationslemma

Eine Folge von reel integrierbaren Zufallsvariablen $\{M_n\}$ ist genau dann ein Martingal, wenn für eine beschränkte, vorhersehbare Folge $\{H_n\}$ gilt:

$$\mathbb{E}(\sum_{k=1}^n H_k \Delta M_k) = 0 \qquad \text{f.a. } n = 1, 2, \ldots.$$

Proposition 2 (Beweisidee)

	$\mathcal{V}$ ist Untervektorraum von $\mathcal{X}$	
$\Longrightarrow$	$\mathcal{V} \cap \Gamma = \emptyset$	mit Hilfssatz 3,
$\Longrightarrow$	$\exists_{\lambda > 0 \in \mathbb{R}^\Omega} \forall_{\tilde{G}_{\varphi'}(T) \in \mathcal{V}} \quad \lambda^T \tilde{G}_{\varphi'}(T) = 0$	mit Farkas' Lemma,
$\Longrightarrow$	$\forall_{\omega \in \Omega} \quad \mathcal{P}^*(\{\omega\}) := \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \lambda(\omega')} > 0$	
	ist W-Maßauf Ω äquivalent zu $\mathcal{P}$;	
$\Longrightarrow$	$\mathbb{E}^* \left(\tilde{G}_{\varphi'}(T) \right) = 0$	$\mathbb{E}^*$ ist $\mathcal{P}^*$-Erwartungswert
$\Longrightarrow$	$\forall_{i=1,\ldots,d} \quad \mathbb{E}^* \left(\sum_{\tau=1}^{T} \varphi(\tau \triangle \tilde{S}_i(\tau) \right) = 0$	
$\Longrightarrow$	$\tilde{S}_i(t)$ sind $\mathcal{P}^*$-Martingale	nach Martingaltransformationslemma

Hilfssatz 2 (Farkas' Lemma Variante)

Für eine gegebene $m \times n$ Matrix M gilt genau eine der folgenden Aussagen:

1. $\exists_{x \in \mathbb{R}^n, x > 0} \quad Mx = 0$
2. $\exists_{y \in \mathbb{R}^m} \quad y^T M \geq 0 \quad$ und $\quad y^T M \neq 0.$

Farkas' Lemma Original

Für eine gegebene $m \times n$ Matrix A und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:

1. $\exists_{x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0} \quad Ax = b$
2. $\exists_{y \in \mathbb{R}^m} \quad y^T A \leq 0 \quad$ und $\quad y^T b > 0.$

Beweis Variante mit Hilfe des Originals

Sei M eine $m \times n$ Matrix und es gelte:

$$
\begin{array}{lll}
 & \exists_{x > 0 \in \mathbb{R}^n} \quad Mx = 0 & \\
oBdA & \exists_{x \geq \mathbf{1} \in \mathbb{R}^n} \quad Mx = 0 & \textit{Skalierung} \\
\Longleftrightarrow & \exists_{\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \geq 0 \in \mathbb{R}^{2n}} \quad A \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = b & \text{wobei } A = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}, b = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \\
 & \Rightarrow \quad Mx = 0 \quad \wedge \quad x - s = \mathbf{1} & \text{Rückr. also klar} \\
\overset{Farkas}{\Longleftrightarrow} & \nexists_{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T A \leq 0 \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T b > 0 & \\
 & \Rightarrow \quad -u^T M + v^T I \leq 0 \quad \wedge \quad v^T \mathbf{1} > 0 & \\
 & \qquad\qquad -v^T I \leq 0 & \\
 & \Rightarrow \quad -u^T M \leq 0 \quad \wedge \quad -u^T M \neq 0 & \\
\Longleftrightarrow & \nexists_{y \in \mathbb{R}^m} \quad y^T M \geq 0 \quad \wedge \quad y^T M \neq 0. &
\end{array}
$$

$\square$

Hilfssatz 3

In einem arbitragefreien Markt erfüllt jede vorhersagbare Anlagestrategie $\varphi' = (\varphi_{1,\ldots,\varphi_d})$

$$\tilde{G}_{\varphi'}(T) \notin \Gamma.$$

Proposition 3 von Nadine

$$\underbrace{\begin{array}{l}\varphi_1(t), \ldots, \varphi_d(t))' \text{ vorhersagbar} \\ V_\varphi(0) \text{ ist } F_0\text{-meßbar}\end{array}}_{\Rightarrow}$$

$$\dot{\exists}_{(\varphi_0(t))_{t=1}^T} \varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_d)' \begin{array}{l}\text{selbstfinanzierend mit} \\ V_\varphi(0) = V_0 = 0.\end{array}$$

Proposition 2 von Nadine

Eine Anlagestrategie φ ist genau dann selbstfinanzierend, wenn gilt:

$$\tilde{V}_\varphi(t) = V_\varphi(0) + \tilde{G}_\varphi(t) \qquad t = 0, 1, \ldots, T$$

Beweis Hilfssatz 3

$\mathcal{M}$ arbitragefrei und $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)'$ vorhersagbar

$\Rightarrow \dot{\exists}_{(\varphi_0(t))_{t=1}^T} \varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_d)'$ selbstfinanzierend mit$V_\varphi(0) = V_0 = 0$.

Wegen Proposition 3 von Nadine.
Angenommen $\tilde{G}_\varphi(t) \in \Gamma$, dann folgt mit Prop.2 von Nadine:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{V}_\varphi(T) & = & \beta(T)^{-1}\tilde{V}_\varphi(T) \\ & = & \beta(T)^{-1}(V_\varphi(0) + \tilde{G}_\varphi(T)) \\ & = & \beta(T)^{-1}\tilde{G}_\varphi(T) \\ & \geq & 0. \end{array}$$

und $\mathbb{P}(\beta(T)^{-1}\tilde{(G)}_\varphi(T) > 0) > 0$ also $\mathbb{P}(\tilde{V}_\varphi(T) > 0) > 0$. Dann ist φ ist eine Arbitragestrategie. Da $\mathcal{M}$ arbitragefrei ist, folgt die Behauptung.

$\square$

Beweis Proposition 2

Konstruktion des äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{X} & := & \{ \text{ Zufallsvariablen } X \text{ auf } (\Omega, \mathcal{F})\} \\ \mathcal{V} & := & \{X \in \mathcal{X} : X = \tilde{G}_\varphi(T), \varphi \text{ vorhersagbar}\} \\ \Gamma & := & \{X \in \mathcal{X}^+ : \forall_{\omega\in\Omega} X(\omega) \geq 0 \text{ und } \exists_{\omega\in\Omega} X(\omega) > 0\} \end{array}$$

- Aus Hilfssatz 3 folgt $\mathcal{V} \cap \Gamma = \emptyset$.
- $\mathcal{V}$ ist Untervektorraum von $\mathcal{X}$, wegen der Linearität der diskontierten Gewinnentwicklungen $\tilde{G}_\varphi$ in φ. Klar ?
  Wenn nicht: Linearkombinationen von vorhersagbaren Anlagestrategien sind wiederum vorhersagbar. Hat man nun also zwei diskontierte Gewinnentwicklungen $\tilde{G}_{\varphi^1}$ und $\tilde{G}_{\varphi^2}$, wobei φ^1 und φ^2 vorhersagbar sind, dann folgt:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{G}_{\varphi^1}(t) + \tilde{G}_{\varphi^2}(t) & = & \sum_{\tau=1}^t \varphi^1(\tau)\Delta\tilde{S}(\tau) + \sum_{\tau=1}^t \varphi^2(\tau)\Delta\tilde{S}(\tau) \\ & = & \sum_{\tau=1}^t (\varphi^1(\tau) + \varphi^2(\tau))\Delta\tilde{S}(\tau) \\ & = & \tilde{G}_{\varphi^1+\varphi^2}(t). \end{array}$$

- Da $\mathcal{V}$ UVR von $\mathcal{X}$ ist, folgt

$$\exists_{M\in\mathbb{R}^{k\times\Omega}} \forall_{v\in\mathcal{V}} \exists_{y\in\mathbb{R}^k} \qquad v = M^T y.$$

  Aus $\mathcal{V} \cap \Gamma = \emptyset$ folgt:

$$\begin{array}{rlll} \Longrightarrow & \nexists_{v\in\mathcal{V}} & v \geq 0 \quad \wedge \quad v \neq 0 & \\ \Longrightarrow & \nexists_{y\in\mathbb{R}^k} & y^T M \geq 0 \quad \wedge \quad y^T M \neq 0 & \leftrightarrow M^T y \geq 0 \in \mathcal{V} \\ \overset{Farkas}{\Longrightarrow} & \exists_{\lambda\in\mathbb{R}^\Omega} & M\lambda = 0 \quad \wedge \quad \lambda > o & \end{array}$$

  Wir können M sogar direkt angeben. Denn wir wollen ja aus einer Anlagestrategie φ' aus der Menge der vorhersagbaren Strategien $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{d+T+\Omega}$ (UVR) einen Gewinnprozess erhalten. Betrachte dazu:

$$\tilde{G}_{\varphi'}(T,\omega) = \sum_{\tau=1}^T \varphi'(\tau,\omega)\Delta\tilde{S}(\tau,\omega) = \sum_{\tau=1}^T \sum_{i=1}^d \varphi_i(\tau,\omega)\Delta\tilde{S}_i(\tau,\omega)$$

  Offensichtlich gibt es eine lineare Funktion von $\mathcal{W}$ nach $\mathbb{R}^\Omega$, also die Matrix M^T mit:

$$M^T = \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_N \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \forall_{\varphi'\in\mathcal{W}} \quad M^T\varphi' = \tilde{G}_{\varphi'}(T) \in \mathcal{V}$$

  mit $m_i = \Big(\Delta\tilde{S}_1(1,\omega_i), \ldots, \Delta\tilde{S}_d(T,\omega_i)\Big)$.
  Womit dann auch die Dimensionen von M klar sind: $k = d+T$.
- Definition des zu $\mathbb{P}$ äquivalenten W-Maßes:

$$\forall_{\omega\in\Omega} \qquad \mathbb{P}^*(\{\omega\}) := \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega'\in\Omega} \lambda(\omega')}$$

Nun also noch Zeigen, dass $\tilde{S}$ ein $\mathbb{P}^*$-Martingal ist:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*(\textstyle\sum_{\tau=1}^{T} \varphi(\tau)\Delta\tilde{S}(\tau)) &= \mathbb{E}^*(\tilde{G}_\varphi(T)) \\
&= \textstyle\sum_{\omega\in\Omega} \tilde{G}_\varphi(T,\omega)\wp^*(\omega) \\
&= \textstyle\sum_{\omega\in\Omega} \tilde{G}_\varphi(T,\omega)\frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega'\in\Omega}\lambda(\omega')} \\
&= \lambda\tilde{G}_\varphi(T)\left(\frac{1}{\sum_{\omega'\in\Omega}\lambda(\omega')}\right)^{-1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Da dies für jede vorhersagbar Strategie φ gilt, gilt sie auch für solche in denen jeweils nur ein Wertpapier besessen wird, also gilt:

$$\mathbb{E}^*\left(\sum_{\tau=1}^{T}\varphi_i(\tau)\Delta\tilde{S}_i(\tau)\right) = 0 \qquad \text{f.a. i=1,...,d.}$$

Aufgund der Endlichkeit von Ω ist φ beschränkt womit folgt dass die diskontierten Preisentwicklungen $(\tilde{S}_i(t))$ $\mathbb{P}^*$ -Martingale sind, bzw. $\tilde{S}$ ein d-dimensionales $\mathbb{P}^*$-Martingal ist.

$\square$