Felsner/de Longueville

Abgabe am Donnerstag, den 6.6.2002, vor der Übung

Aufgabe 1)

Zeige die Äquivalenz der Axiomensysteme (R1)–(R3) und (I1)–(I3). Es ist also zu zeigen, daß ein Matroid $M = (S, r)$ gegeben durch eine Rangfunktion, die (R1)–(R3) erfüllt, eine Menge $\mathcal{J}$ von Mengen definiert, die den Axiomen (I1)–(I3) genügt. Umgekehrt, daß ein Matroid $M = (S, \mathcal{J})$ gegeben durch eine Menge von unabhängigen Mengen $\mathcal{J}$, die den Axiomen (I1)–(I3) genügt, eine Rangfunktion r definiert, die die Axiome (R1)–(R3) erfüllt. Ferner ist zu zeigen, daß diese Prozesse invers zueinander sind.

Aufgabe 2)

Betrachte das graphische Matroid $M = M(K_{3,3})$. Zeige ohne Ausnutzung des Satzes von Whitney, daß das duale Matroid M^* nicht graphisch ist.

Aufgabe 3)

Es sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph. Gib eine Basis für den Zyklenraum $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G)$ an.

Aufgabe 4)

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit n Knoten und m Kanten. Zeige, daß die Dimension des Zyklenraums größer gleich $m - n + 1$ ist. **Hinweis:** Betrachte einen aufspannnenden Baum T von G. Dieser hat $n - 1$ Kanten!

Aufgabe 5)

Es sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph und $k \geq 1$. Eine Färbung von G mit k Farben ist eine Funktion $c : V \to \{1, \ldots, k\}$, die benachbarten Knoten verschiedene Werte zuordnet. Es sei $\varphi_G(k)$ die Anzahl der Färbungen von G mit k Farben. Zeige, daß die folgende Rekursionsformel gilt

$$\varphi_G(k) = \varphi_{G\setminus e}(k) - \varphi_{G/e}(k),$$

wobei wir ohne Einschränkung eventuell entstandene Mehrfachkanten in G/e miteinander identifizieren, um wieder einen einfachen Graphen zu erhalten. Finde eine geeignete Menge von Graphen die als Rekursionsanfang dienen kann, und bestimme die Werte $\varphi_G(k)$ für diese Graphen.