



Die Mathematik dahinter: Das Sperner-Lemma

Mark de Longueville

Das Sperner-Lemma

Gegeben sei eine Unterteilung eines Dreiecks in viele kleine Dreiecke. Jede Ecke sei mit einer der Zahlen 1, 2 oder 3 beschriftet, wobei entlang des Dreieckrandes die im Bild gezeigten Einschränkungen gelten. Dann gibt es ein kleines Dreieck, dessen Ecken mit 1, 2 und 3 beschriftet sind.

Beispiel

Im abgebildeten Beispiel gibt es drei Dreiecke mit der behaupteten Eigenschaft.

Beweisidee

Betrachte den abgebildeten blauen Graphen. Dessen Ecken werden immer dann verbunden, wenn zwischen ihnen eine 1-2-Kante verläuft. Von der äußeren Ecke gehen ungerade viele Kanten aus. Von allen anderen Ecken gehen 0, 1 oder 2 Kanten aus. Eine einfache Beobachtung aus der Graphentheorie besagt nun, daß die Anzahl der Ecken von denen ungerade viele Kanten ausgehen, eine gerade Zahl ist. Es muß also eine Ecke im Inneren eines kleinen Dreiecks geben, von der nur eine Kante ausgeht. Das dazugehörige Dreieck ist eines der gesuchten.

